

Základy teorie chyb a zpracování fyzikálních měření

Jiří Novák

Tento text je zamýšlen jako pomůcka pro vypracování laboratorních úloh z fyziky. Je určen pouze pro studijní účely a jeho účelem je objasnit metody zpracování měření.

1. Chyby měření

1.1 Druhy chyb

Jestliže provádíme měření téže fyzikální veličiny za stejných podmínek několikrát za sebou, obdržíme zpravidla odlišné hodnoty. Měřené veličině však náleží pouze jedna správná hodnota. Každou odchylku naměřené hodnoty X' od správné hodnoty X nazýváme obecně chybou měření, tj. definujeme tedy chybu měření ΔX jako

$$\Delta X = X - X'.$$

Chyby mohou být jak kladné, tak i záporné. Udáváme-li chybu rozdílem správné veličiny a naměřené veličiny, potom mluvíme o *chybě absolutní*. Absolutní chyba je veličina, která má rozměr měřené veličiny, tj. má stejné jednotky. Jestliže vyjádříme chybu relativně vůči měřené hodnotě, potom jde o *relativní chybu* měřené veličiny. Relativní chybou δ měřené veličiny se rozumí poměr absolutní chyby ΔX a správné hodnoty X této veličiny. Pro definici relativní chyby platí tedy

$$\delta X = \frac{\Delta X}{X} = \frac{X - X'}{X}.$$

Relativní chyba je bezrozměrná veličina a často se uvádí v procentech. Může stejně jako absolutní chyba nabývat kladných nebo záporných hodnot. Pomocí relativních chyb můžeme porovnat přesnost měření fyzikálních veličin s různým rozměrem.

Ten, kdo provádí dané měření, by se měl především snažit provádět a zpracovávat toto měření s co nejmenšími chybami. Ovšem nelze nikdy dosáhnout výpočtem vyšší přesnosti nežli zaručuje daná metoda měření. Hlavní příčiny, díky kterým k chybám dochází, jsou nedokonalost a nepřesnost měřících přístrojů, použitá metoda měření, nedokonalost a nespolehlivost lidských smyslů (pokud na nich měření závisí) a přehlížení okolních vlivů působících na měření. Chyby měření lze v zásadě dělit na systematické a náhodné.

Systematické chyby - zkreslují výsledek měření zcela určitým způsobem a s jistou pravidelností, což se projevuje zejména tím, že vedou k hodnotám, které jsou buď trvale vyšší, nebo trvale nižší, než je hodnota správná. Jejich příčinou často bývá použitá metoda měření, použité měřící přístroje a ten, kdo měření provádí (tzv. chyby osobní).

Chyby, jejichž příčinou je použitá metoda, vznikají nedokonalostí, nepřesnostmi, neúplností nebo nevhodností použitého způsobu měření. Často se stává, že použitá metoda, odpovídá určité definici měřené veličiny, kterou však při měření nelze plně respektovat. Například vážením na vzduchu vzniká systematická chyba v důsledku neuvažování různého vztlaku látek různé hustoty nebo nelze např. použít při měření tyče délky 1m mikrometrického šroubu, ačkoliv sám o sobě je velmi přesný měřící nástroj, tak pro toto měření se absolutně nehodí (to je stejné jako střílet na vrabce kanónem). Tyto chyby lze odstranit buď použitím jiné metody nebo vyloučením chyby výpočtem.

Chyby, jejichž příčinou jsou použité přístroje, vznikají nedokonalostí a nepřesnostmi provedení měřících přístrojů. Typickým případem je nedokonalost a nepřesnost stupnic měřících přístrojů a pomůcek, nepřesnost sady závaží aj. Chyby tohoto typu lze u každého přístroje částečně odstranit zavedením příslušných korekčních činitelů, které upravují měřené hodnoty.

Osobní chyby jsou systematické chyby způsobené tím, kdo měření provádí (pozorovatel). Tyto chyby se projevují zejména při měření časových okamžiků a délek a jsou silně závislé na použitém pozorovateli. Tyto chyby se dají vyloučit tím, že vyloučíme subjektivní pozorování objektivními metodami (tj. nepoužijeme pozorovatele) nebo ji též můžeme vyloučit použitím většího počtu pozorovatelů. Dále při měření můžeme narazit na tzv. *hrubé chyby*, jež jsou způsobeny únavou či nepozorností při měření. Velké hrubé chyby se většinou lehce poznají, protože výrazně vybočují z charakteru měřených hodnot stejné veličiny. Hrubé chyby zásadně z měření vylučujeme, jelikož by ovlivnily výsledky měření nepřijatelným způsobem.

Náhodné chyby jsou jiného typu nežli chyby systematické. Vyloučíme-li systematické chyby z měřicího procesu a opakujeme-li měření nějaké veličiny za stejných podmínek, zjistíme, že výsledné hodnoty jednotlivých opakovaných měření téže veličiny se navzájem poněkud liší, tj. nedostaneme vždy stejnou hodnotu. Příčinu těchto chyb nedovedeme určit, mohou být způsobeny např. malými časovými změnami okolních podmínek v průběhu měření (tj. teploty, tlaku, vlhkosti, elektromagnetických veličin atd.). Těchto navzájem nezávislých vlivů může spolupůsobit v některých případech opravdu mnoho, přičemž jejich jednotlivý vliv je těžko postižitelný. Proto původ náhodných chyb lze vidět skutečně v náhodě. Na rozdíl od chyb systematických, jež se vyznačují určitou pravidelností, se náhodné chyby chovají naprosto nepravidelně (náhodně).

Chyby zaviněné jednotlivými nezávisle působícími vlivy se nazývají elementárními chybami. Výslednou náhodnou chybu měření ε , je pak možno vyjádřit jako součet elementárních chyb a můžeme tedy psát

$$\varepsilon = \sum \varepsilon_i$$

kde ε_i označuje elementární chyby. Dále předpokládáme, že náhodné chyby se vyskytují jak záporné, tak i kladné, a že pravděpodobnost výskytu kladných i záporných chyb je stejná. Výsledek měření představuje v důsledku působení náhodných chyb náhodnou veličinu a tudíž k vyšetřování náhodných chyb měření je nutné použít statistických zákonitostí. Lze poznamenat, že statistické zákonitosti se přesně uplatňují v případech, kdy máme velký počet měření ($n \rightarrow \infty$). V případě menšího počtu měřených hodnot je nutno nahradit některé charakteristiky náhodných veličin tzv. výběrovými charakteristikami. Na základě počtu pravděpodobnosti lze pro každou náhodnou veličinu, tj. pro každou měřenou veličinu, zjistit její tzv. nejpravděpodobnější hodnotu.

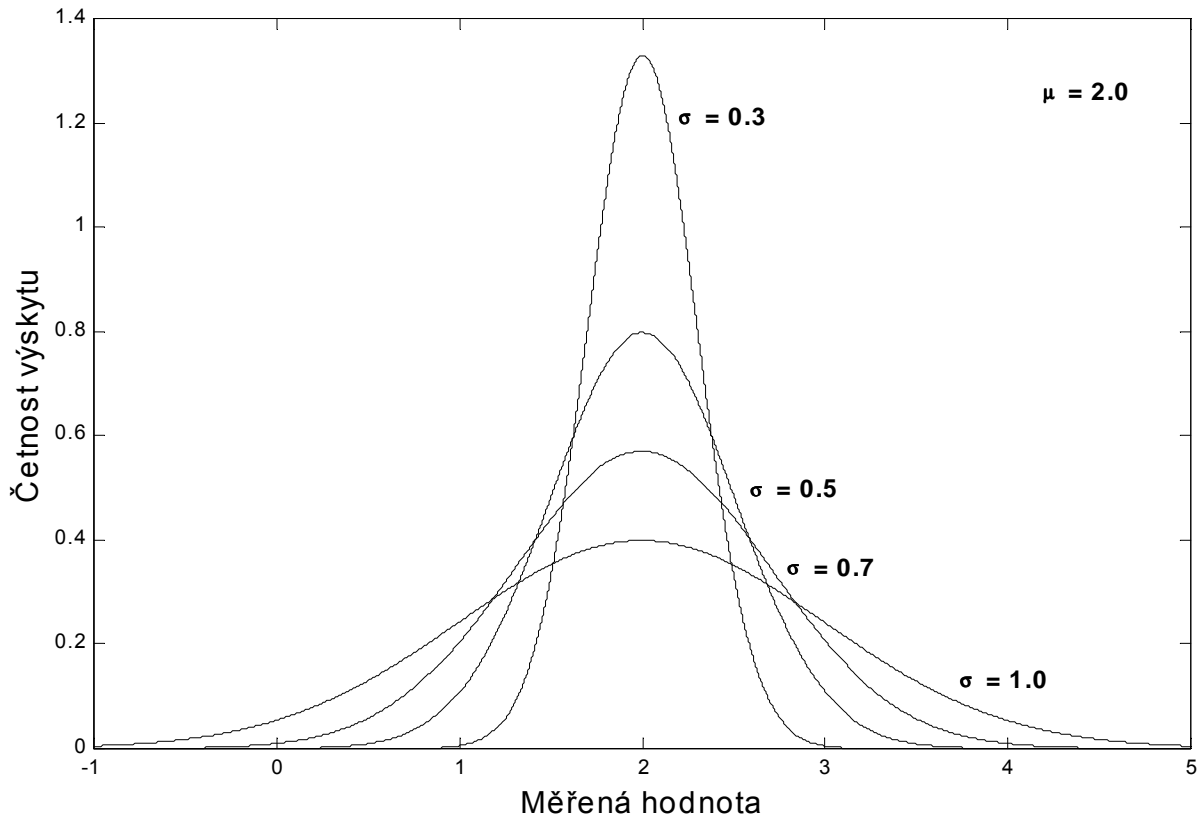
Spojité funkce $p(x)$ jež udává rozdělení pravděpodobnosti výskytu náhodné veličiny v celém intervalu přípustných hodnot se nazývá *hustota pravděpodobnosti*. Pravděpodobnost, že náhodná veličina x bude ležet v intervalu (α, β) je

$$P(\alpha, \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} p(x) \cdot dx$$

Z teorie pravděpodobnosti je známo, že hustota pravděpodobnosti náhodné veličiny, jež je vyjádřena jako součet mnoha navzájem nezávislých, ale jinak libovolných veličin, je dána následující funkcí

$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}},$$

jež se nazývá *normální zákon rozdělení* náhodné veličiny. Veličina μ se nazývá střední hodnota, σ je směrodatná odchylka a σ^2 je rozptyl náhodné veličiny. Na následujícím obrázku je znázorněno několik normálních rozdělení s různými rozptyly a stejnou střední hodnotou $\mu = 2$.



Obr.1

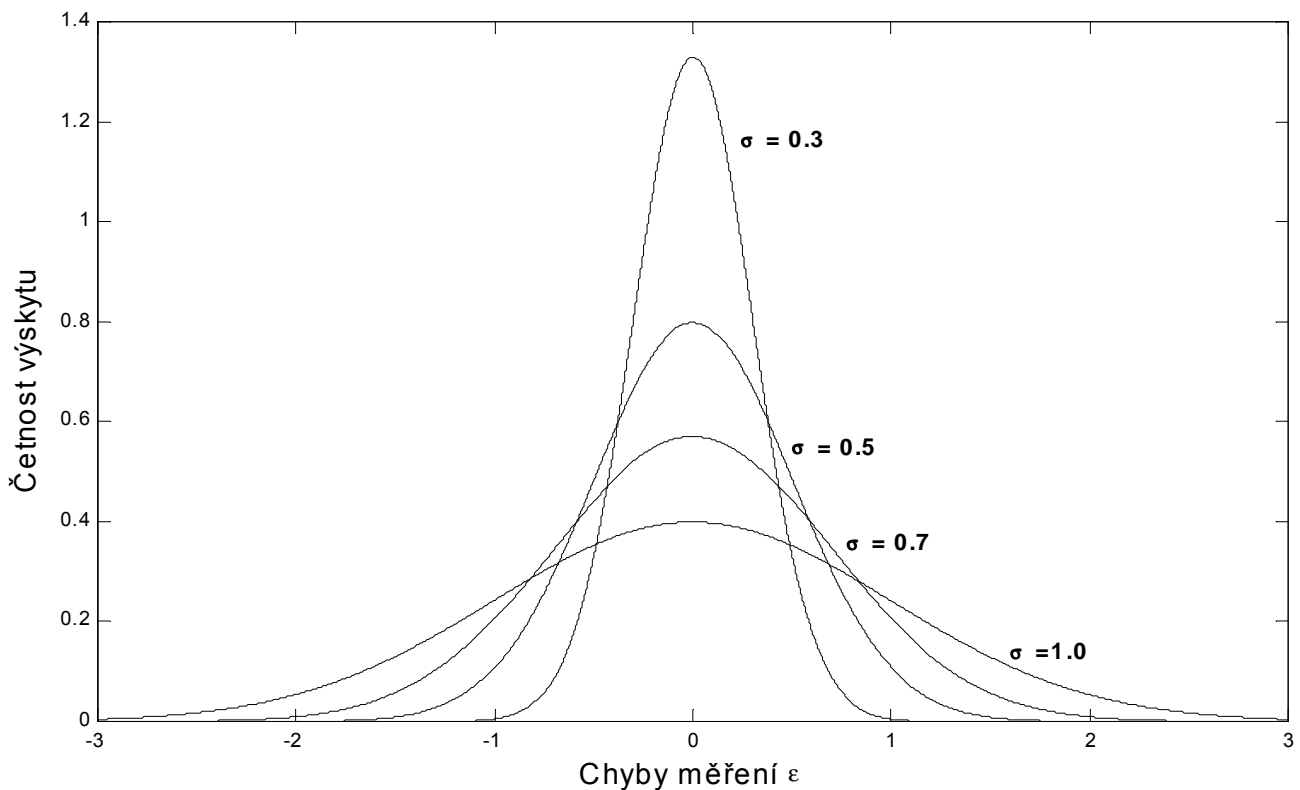
Jak je vidět z obrázku, rozptyl vyjadřuje míru rozptýlenosti jednotlivých měření a střední hodnota nejpravděpodobnější hodnotu daného měření.

Uvažujeme-li tedy náhodnou chybu nějaké měřené fyzikální veličiny za náhodnou veličinu, potom můžeme za platnosti předchozích předpokladů psát pro hustotu rozdělení náhodných chyb

$$p(\varepsilon) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\varepsilon^2}{2\sigma^2}},$$

což je tzv. Gaussův normální zákon chyb. Plyne z něho to, že četnost chyb klesá s rostoucí velikostí chyby. Tudiž velké chyby jsou méně četné než malé chyby, což odpovídá skutečnosti. Jak lze pozorovat z obr.2 střední hodnota náhodných chyb je rovna nule, jelikož se vyskytují kladné i záporné chyby stejné velikosti se stejnou četností. Proto je nutné jako měřítko chyby vzít nějakou jinou veličinu, a to směrodatnou odchylku daného rozdělení, která se též nazývá *střední kvadratická chyba* a platí pro ni

$$\sigma^2 = \frac{\sum \varepsilon^2}{n}.$$



Obr.2

Chyby měření se většinou uvádějí jako tzv. *pravděpodobné chyby* ϑ , které obsahují informaci o tom, jaké procento chyb se nachází ve spolehlivostním intervalu $(-\vartheta, \vartheta)$. Chceme-li tedy najít takovou hodnotu chyby ϑ , kdy do uvedeného intervalu zahrneme ξ % všech chyb, potom musíme řešit následující rovnici

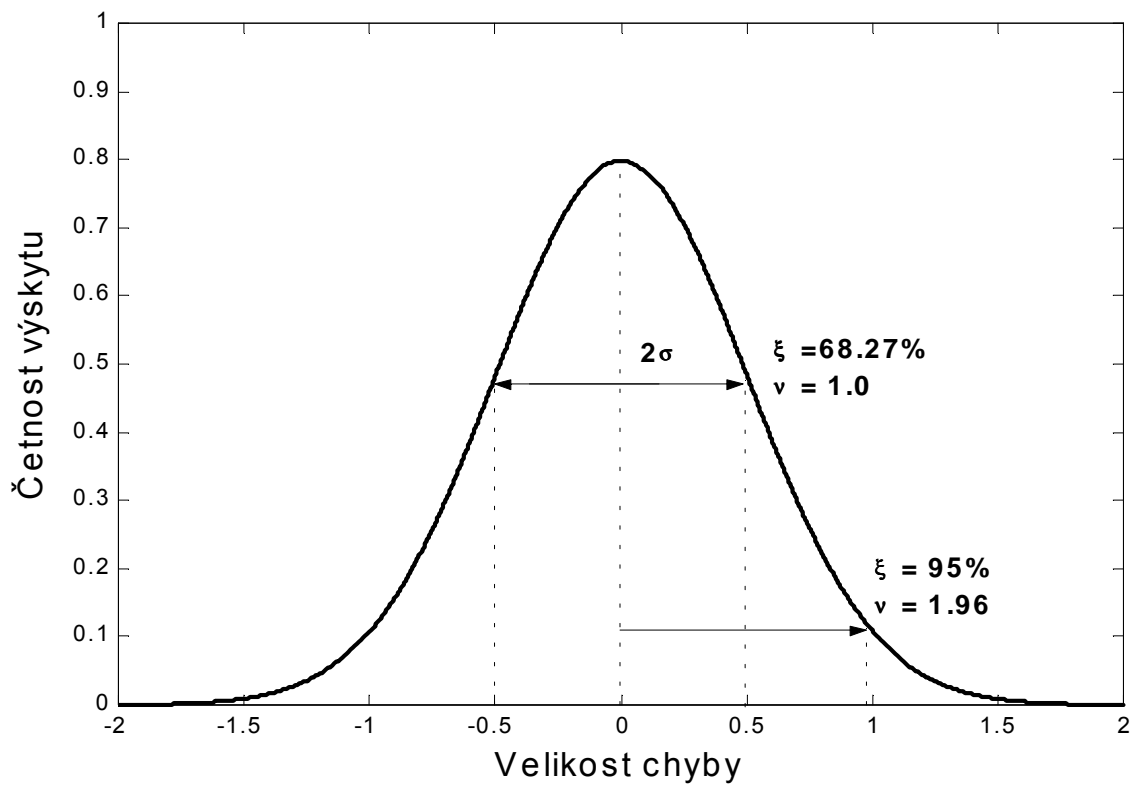
$$\int_{-\vartheta}^{\vartheta} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\varepsilon^2}{2\sigma^2}} d\varepsilon = \xi/100.$$

Pravděpodobnou chybu ϑ_{ξ} , která pokrývá interval spolehlivosti chyb s pravděpodobností výskytu ξ % lze zapsat následovně

$$\vartheta_{\xi} = v_{\xi} \sigma,$$

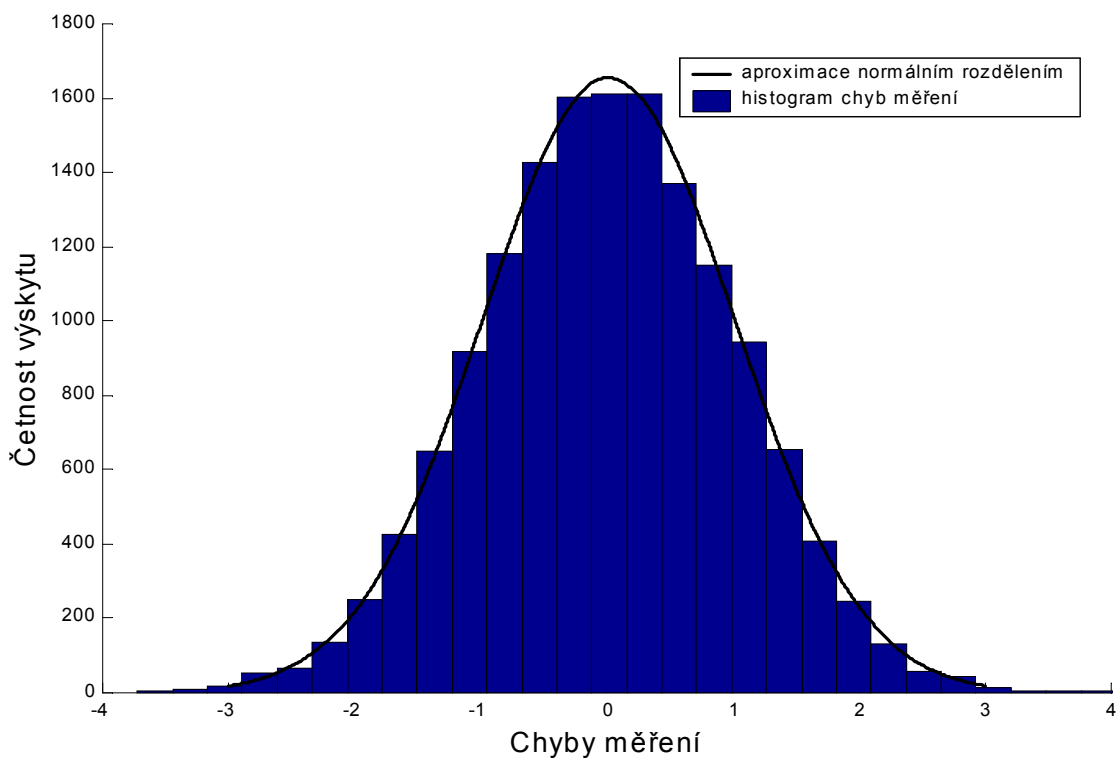
kde v_{ξ} je příslušný koeficient vyjadřující daný spolehlivostní interval. Jak lze pozorovat z obr.3 je při požadavku $\xi = 95$ % koeficient a tudíž do intervalu $(-\vartheta_{\xi}, \vartheta_{\xi})$ padne přibližně 95% všech chyb. Chyba rovná trojnásobné střední chybě se nazývá *krajní chybou* a pravděpodobnost, že nebude při měření překročena, se rovná přibližně 99,73 %. Je též možné chybu vyjádřit jako tzv. průměrnou chybu λ , která je definována následovně

$$\lambda = \frac{\sum |\varepsilon|}{n}.$$



Obr.3

Na následujícím obrázku je vidět histogram četností výskytu jednotlivých měřicích chyb při skutečném měření, přičemž je grafem proložena odpovídající křivka (normální rozdělení).



Obr.4

V následující tabulce jsou uvedeny některé nepoužívanější intervaly spolehlivosti a jim odpovídající koeficienty v_ξ .

Tab.1

ξ [%]	v_ξ
50	0,674
90	1,645
95	1,960
99	2,576

1.2 Nejpravděpodobnější hodnota měřené veličiny a její přesnost

Jak již bylo řečeno, výsledek fyzikálního měření lze pokládat za náhodnou veličinu, která se řídí normálním rozdělením, a výsledky platí pro veliký počet měření ($n \rightarrow \infty$). Těchto vlastností náhodných chyb můžeme využít při hledání nejpravděpodobnější hodnoty měřené veličiny a při hodnocení přesnosti prováděného měření. Označíme-li výsledek i -tého měření jako x_i , chybu i -tého měření jako ε_i , správnou hodnotu měřené veličiny x a předpokládáme ($n \rightarrow \infty$), potom dostaneme

$$\varepsilon_i = x - x_i, \quad \sum_{i=1}^n \varepsilon_i = 0.$$

Upravíme-li předchozí vztahy, potom můžeme vypočítat správnou hodnotu výsledku měření jako

$$\sum_{i=1}^n (x - x_i) = nx - \sum_{i=1}^n x_i \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}.$$

V mezním případě nekonečného počtu měření lze za předchozích předpokladů správnou hodnotu výsledku měření vypočítat jako aritmetický průměr naměřených hodnot. Při reálném měření však není nikdy nekonečný a někdy ani dostatečně velký. Abychom i v tomto důležitém případě našli nejpravděpodobnější hodnotu výsledku, musíme postupovat následovně.

Je nutné zjistit, jaké rozložení chyb bude nejpravděpodobnější při konečném počtu měření n . Pravděpodobnost, že chyba náhodně vybraného měření leží v intervalu

$$\left(\varepsilon - \frac{1}{2} d\varepsilon, \varepsilon + \frac{1}{2} d\varepsilon \right),$$

je v důsledku platnosti normálního zákona rozdělení náhodných chyb

$$dP(\varepsilon) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\varepsilon^2}{2\sigma^2}} d\varepsilon.$$

Obdobně můžeme vyjádřit pravděpodobnost rozložení náhodných chyb kolem jiných hodnot chyb ε . Pravděpodobnost, že několik nezávislých jevů nastane současně je rovna součinu jejich pravděpodobností, tj. pro rozložení n chyb kolem hodnot $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ bude

$$dP(\epsilon) = \prod_{i=1}^n dP(\epsilon_i) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\epsilon_1^2 + \dots + \epsilon_n^2)} d\epsilon_1 d\epsilon_2 \dots d\epsilon_n,$$

přičemž předpokládáme, že jednotlivá měření jsou prováděna stejně přesně, tj. $\sigma = 0$. Nejpravděpodobnější bude takové rozložení chyb, které má největší pravděpodobnost, tj. pro které je předchozí výraz maximální. To však nastane pro nejmenší hodnotu výrazu

$$\epsilon_1^2 + \epsilon_2^2 + \dots + \epsilon_n^2 \rightarrow \min., \quad \Leftrightarrow \quad (x - x_1)^2 + (x - x_2)^2 + \dots + (x - x_n)^2 = \min.$$

Minimalizací uvedeného výrazu získáme jako *nejpravděpodobnější hodnotu* x výsledku měření aritmetický průměr \bar{x} naměřených hodnot

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}.$$

Skutečnou (absolutně přesnou) hodnotu měřené veličiny nikdy nezjistíme, ale ze všech vztahů mezi správnou hodnotou a naměřenými hodnotami je nejpravděpodobnější vždy aritmetický průměr. Že aritmetický průměr nedává přesně správnou hodnotu naměřené veličiny je možné odvodit z následujícího vztahu

$$\sum_{i=1}^n \epsilon_i = \sum_{i=1}^n (x - x_i) = nx - \sum_{i=1}^n x_i, \quad \Rightarrow \quad \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = x - \frac{\sum_{i=1}^n \epsilon_i}{n},$$

ze kterého je vidět, že aritmetický průměr \bar{x} se liší od správné hodnoty měřené veličiny x o člen

$$\sum_{i=1}^n \epsilon_i / n.$$

Další důležitým problémem je zjištění, s jakou přesností bylo měření provedeno. Musíme tedy určit hodnotu střední kvadratické chyby počítané z nejpravděpodobnější hodnoty \bar{x} a nikoliv ze správné hodnoty x . označíme-li Δ_i odchylku i -tého měření od aritmetického průměru, potom se zřetelem na předchozí vztahy platí

$$\Delta_i = \epsilon_i - \frac{\sum_{k=1}^n \epsilon_k}{n}.$$

Umocněním předcházejícího vztahu a sečtením pro všechny naměřené veličiny x_i získáme

$$\sum_{i=1}^n \Delta_i^2 = \frac{n-1}{n} \sum_{i=1}^n \epsilon_i^2 - \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=i+1}^n \epsilon_i \epsilon_k.$$

Druhý člen v uvedeném výrazu obsahuje $\binom{n}{2}$ součinů $\epsilon_i \epsilon_k$, kladných i záporných, jejichž počet je přibližně stejný. Proto je možné tento druhý člen zanedbat, přičemž se dopouštíme zanedbatelné chyby. Získám tak výraz

$$\sum_{i=1}^n \Delta_i^2 = \frac{n-1}{n} \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2,$$

ze kterého pro *střední chybu jednoho měření* lehce získáme

$$\sigma^* = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \Delta_i^2}{n-1}}.$$

Tato veličina se také (obzvláště ve statistice) označuje symbolem s a nazývá se *výběrová směrodatná odchylka*.

Zatím jsme vždy uvažovali, že přesnost všech měření byla stejná. Pokud však budeme měřit n přímých a nezávislých měření x_i téže veličiny x , která jsou zjištěna s různou přesností, musíme použít modifikované vztahy pro nejpravděpodobnější hodnotu a střední chybu jednoho měření. Při odvozování těchto vztahů postupujeme naprosto stejným způsobem jako u stejně přesných dílčích měření. Jediná změna je v tom, že uvažujeme $\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \dots \neq \sigma_n$, tj. různou přesnost měření.

Nejpravděpodobnější hodnotou takto prováděného měření je potom tzv. *vážený aritmetický průměr*

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n w_i x_i}{\sum_{i=1}^n w_i} \quad \text{kde} \quad w_i = \frac{1}{\sigma_i^2}.$$

Střední kvadratickou chybou provedeného měření při různé přesnosti dílčích měření je potom následující výraz

$$\sigma^* = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n w_i \Delta_i^2}{(n-1) \sum_{i=1}^n w_i}}.$$

1.3 Chyby přímých měření

Velmi často měříme nějakou fyzikální veličinu X přímo, tj. například vážení, měření délky aj. Tato měření opakujeme n -krát za myslitelně stejných podmínek, abychom mohli získat nejpravděpodobnější hodnotu \bar{x} této veličiny a její střední chybu σ_x . Z n naměřených hodnot x_i určíme nejpravděpodobnější hodnotu \bar{x} jako aritmetický průměr, tj.

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

a dále spočítáme střední kvadratickou chybu daného měření jako

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2}{n(n-1)}},$$

pomocí které můžeme jednoduše určit zvolenou pravděpodobnou chybu, která zajišťuje určitý interval spolehlivosti daného výsledku. *Pravděpodobná chyba* bude poté

$$\vartheta_{x,\xi} = v_\xi \sigma_x.$$

Výsledek celého měření poté zapisujeme ve tvaru: $(\bar{x} \pm \vartheta_{x,\xi})$.

1.4 Chyby nepřímých měření

Řada fyzikálních veličin se získává výpočtem podle nějakého fyzikálního zákona, který vyjadřuje souvislost mezi danou veličinou a několika jinými veličinami, na nichž je závislá a které jsou získávány měřením. Například hustotu pevných látek můžeme určit z naměřené hmotnosti a objemu tělesa. Hledanou veličinu tedy přímo neměříme, ale pouze ji počítáme podle nějakého vzorce (fyzikálního zákona) z jiných měřených nebo vypočtených veličin, u kterých známe jejich pravděpodobnou nebo střední chybu.

Nechť tedy y je nějaká veličina, jež je funkcí n dalších veličin x_i a nechť dále je tato funkce spojitě diferencovatelná na svém definičním oboru. Lze tedy pro tuto závislost psát

$$y = f(x_i) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

Nejpravděpodobnější hodnotu \bar{y} dané veličiny y získáme dosazením nejpravděpodobnějších hodnot \bar{x}_i veličin x_i , tj.

$$\bar{y} = f(\bar{x}_i) = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$$

Absolutní chyby veličin x_i označíme ε_i a následně můžeme vyjádřit diferenciál uvedené funkce, tj. její diferenciální změnu v důsledku velmi malých změn v jejich proměnných, jako

$$df = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i.$$

Jsou-li chyby ε_{ij} , kterých jsme se dopustili při j -tém měření veličin x_i , dostatečně malé, potom můžeme pro příslušné chyby Δy_j výsledné veličiny při j -tém měření psát stejné vztahy jako pro diferenciální přírůstek uvedené funkce, tj.

$$\Delta y_j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \varepsilon_{ij}, \quad j = 1, \dots, N$$

Umocněním předchozího vztahu získáme

$$(\Delta y_j)^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \varepsilon_{ij}^2 + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right) \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kj}.$$

Abychom našli vztah mezi středními σ_i chybami veličin x_i a střední chybou σ_y výsledné veličiny y , zavedeme předpoklad, že pro střední chyby byly určeny na základě velkého počtu N měření a sečteme předchozí rovnice pro všechna provedená měření $j = 1, \dots, N$. Potom platí

$$\sum_{j=1}^N (\Delta y_j)^2 = \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \varepsilon_{ij}^2 + 2 \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right) \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kj}$$

a po dosazení středních kvadratických chyb dostaneme

$$\sigma_y^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{j=1}^N \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right) \left(\frac{\partial f}{\partial x_k} \right) \frac{\varepsilon_{ij} \varepsilon_{kj}}{N}.$$

Vzhledem k tomu, že jsme předpokládali nezávislost středních chyb jednotlivých veličin x_i a veliký počet provedených měření, platí

$$\sum_{j=1}^N \frac{\varepsilon_{ij} \varepsilon_{kj}}{N} = \text{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_k) = 0,$$

a tedy

$$\sigma_y^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \sigma_i^2,$$

což je hledaný *zákon přenášení středních chyb*. Tento obecný vzorec určuje střední chybu σ_y funkce libovolného počtu měřených veličin x_i , jejichž střední chyby jsou σ_i .

Poněvadž v nejnepříznivějším případě se mohou veškeré chyby sčítat, získáme *maximální možnou chybu výsledku* z diferenciálu zkoumané funkce tím, že ji zvolíme jako maximální možnou velikost tohoto diferenciálu, tj.

$$\sigma_{y,MAX} = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \sigma_i.$$

Z předchozích vzorců je vidět, že roli chyb σ mohou hrát jak chyby střední, tak i pravděpodobné nebo chyby měřených veličin odhadnuté před měřením.

Velmi často lze k posuzování přesnosti prováděného měření použít popisu pomocí relativních chyb měřených veličin. Pro *relativní maximální chybu* a pro *střední relativní chybu* poté získáme jednoduše z předchozích vzorců

$$\frac{\sigma_{y,MAX}}{|\bar{y}|} = \frac{\sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \sigma_i}{|f(x_1, \dots, x_n)|},$$

$$\frac{\sigma_y}{|\bar{y}|} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \sigma_i^2}}{|f(x_1, \dots, x_n)|}.$$

Nyní uvedeme několik jednoduchých výsledků, které plynou ze zákona o přenášení chyb měření. Nejprve si ukážeme nejdůležitější z plynoucích důsledků přenosu chyb, a to sice *střední chybu aritmetického průměru* $\bar{\sigma}$. Nechť veličina x byla n -krát změřena, čímž bylo získáno n hodnot x_i . Jako výsledek byl vzat aritmetický průměr jednotlivých měření, jež pokládáme za stejně přesné a přisuzujeme jim stejnou hodnotu střední chyby σ_x , vypočtenou podle vztahu pro střední chybu jednoho měření. Aritmetický průměr můžeme tedy v tomto případě považovat za funkci n veličin x_i , měřených se stejnou chybou a platí

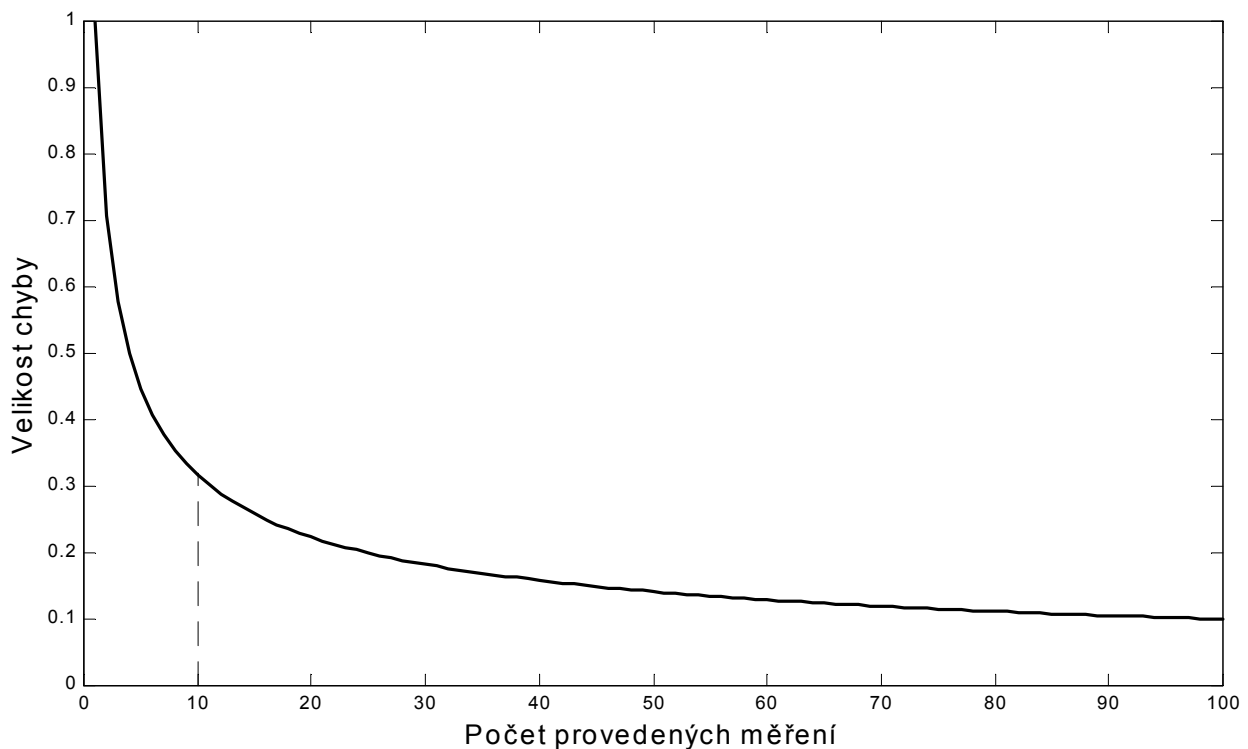
$$\bar{x} = f(x_i) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n},$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \frac{1}{n}, \quad \text{pro } i = 1, \dots, n.$$

Podle zákona o přenášení středních chyb poté dostaneme pro výslednou střední chybu

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2}{n(n-1)}}.$$

Z předchozího vztahu plyne velmi důležitý závěr, že střední chyba aritmetického průměru stejně přesných měření je \sqrt{n} menší nežli střední chyba jednoho měření. Totéž ovšem platí též pro chyby pravděpodobné, jež jsou úměrné chybám středním. Tudíž naměříme-li více hodnot, získáme vyšší přesnost výsledku, což je názorně vidět z následujícího obrázku.



Obr.5

Z obrázku vyplývá, že při provedení 10 měření snížíme chybu měření oproti 1 měření přibližně třikrát. Při provádění dalších měření není již tento pokles zdaleka tak významný. Je vhodné při přímém měření nějaké veličiny tedy tuto veličinu změřit alespoň desetkrát.

Nyní provedeme několik jednoduchých příkladů zákona přenosu pravděpodobných chyb měření ϑ .

1. Máme-li určit chybu funkce jediné měřené veličiny, máme

$$f = f(x), \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{df}{dx}, \quad \text{a tudíž} \quad \vartheta[f(x)] = \left| \frac{df}{dx} \right| \vartheta(x).$$

1a) násobení konstantou c :

$$\vartheta[cx] = c\vartheta(x)$$

1b) mocninná funkce:

$$f(x) = x^k, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = kx^{k-1}, \quad \text{a tudíž} \quad \vartheta[x^k] = kx^{k-1}\vartheta(x),$$

což lze psát také ve tvaru pro relativní chybu ϑ_r jako $\vartheta_r(x) = \frac{\vartheta[x^k]}{x^k} = \frac{\vartheta(x)}{x}$.

1c) logaritmická funkce:

$$f(x) = \ln x, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x}, \quad \text{a tudíž} \quad \vartheta[\ln x] = \frac{\vartheta(x)}{x} = \vartheta_r(x)$$

2. Máme-li funkci dvou proměnných $f(x,y)$:

2a) součet dvou veličin:

$$f(x,y) = x \pm y, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 1, \quad \text{a tudíž} \quad \vartheta[x \pm y] = \sqrt{\vartheta^2(x) + \vartheta^2(y)},$$

2b) součin a podíl dvou mocninných funkcí měřených veličin:

$$f(x,y) = x^s y^t, \quad \frac{\partial f}{\partial x} = s x^{s-1} y^t, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = t x^s y^{t-1},$$

$$\vartheta[x^s y^t] = \sqrt{s^2 \vartheta_x^2(x) + t^2 \vartheta_y^2(y)}.$$

Jako speciální případ předchozího vztahu plyne vzorec pro pravděpodobnou chybu součinu nebo podílu dvou veličin.

$$\vartheta[xy] = \vartheta[x/y] = \sqrt{\vartheta_x^2(x) + \vartheta_y^2(y)}.$$

Je nutné si povšimnout toho, že velikost chyby výsledku ovlivňuje větší z uvažovaných chyb jednotlivých veličin, které vstupují do výpočtu, tj. tím, že máme jednu veličinu změřenu velmi přesně a jinou daleko méně přesně nijak neovlivníme výslednou přesnost, která bude vždy záviset na nejnepřesněji naměřené veličině. Je proto vhodné měřit veličiny přibližně se stejnou přesností.

1.5 Shrnutí nejdůležitějších výsledků teorie chyb

Nejpravděpodobnější hodnotou x výsledku měření je aritmetický průměr \bar{x} naměřených hodnot x_i

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}.$$

Střední chyba jednoho měření je

$$\sigma^* = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n \Delta_i^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1}}.$$

Nejpravděpodobnější hodnotou prováděného měření s různými dílčími váhami (přesnostmi) jednotlivých měření je *vážený aritmetický průměr*

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n w_i x_i}{\sum_{i=1}^n w_i} \quad \text{kde} \quad w_i = \frac{1}{\sigma_i^2}.$$

Střední kvadratickou chybou provedeného měření při různé přesnosti dílčích měření je

$$\sigma^* = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n w_i (x_i - \bar{x})^2}{(n-1) \sum_{i=1}^n w_i}}.$$

Střední chyba aritmetického průměru je

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 - n\bar{x}^2}{n(n-1)}}$$

Pravděpodobná chyba je poté

$$\vartheta_{x,\xi} = v_\xi \sigma_x,$$

přičemž koeficient v_ξ odpovídá požadovanému intervalu spolehlivosti měření.

Zákon přenášení chyb

$$\sigma_y = \sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \sigma_i^2},$$

Tento obecný vzorec určuje střední chybu σ_y funkce libovolného počtu měřených veličin x_i , jejichž chyby (střední, pravděpodobné nebo určené odhadem) jsou σ_i .

Maximální možná chyba výsledku

$$\sigma_{y,MAX} = \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \sigma_i .$$

Relativní maximální chyba měření je

$$\frac{\sigma_{y,MAX}}{|\bar{y}|} = \frac{\sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| \sigma_i}{|f(x_1, \dots, x_n)|} .$$

Střední relativní chyba měření je

$$\frac{\sigma_y}{|\bar{y}|} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)^2 \sigma_i^2}}{|f(x_1, \dots, x_n)|} .$$

2. Zpracování měření

Každé měření nějaké fyzikální veličiny by mělo být zpracováno co nejpřehledněji, nejnázorněji, s cílem dosáhnout co největší přesnosti, tj. dosáhnout co nejmenších chyb měření. O tom, jakým způsobem zpracovávat měření a zjišťovat chyby měření bylo dostatečně napsáno v kapitole o chybách. Zde je pouze uveden způsob, jakým se zapisují veškeré výsledky měření.

Jestliže měříme nějakou veličinu X s určitou absolutní chybou ΔX , nebo tuto veličinu vypočteme z naměřených hodnot, potom výsledek uvádíme ve tvaru

$$(\bar{X} \pm \Delta X) \text{ [jednotka]},$$

kde \bar{X} je nejpravděpodobnější hodnota měřené veličiny a ΔX je absolutní chyba této veličiny. Samozřejmě je nutné uvést jednotky měřené veličiny. Výsledné hodnoty chyby se zaokrouhlují na 1 resp. 2 platné číslice (1. platná číslice je ta, která je v daném čísle první nenulová zleva). Výsledná hodnota měřené veličiny se poté zaokrouhlí na stejný počet desetinných míst jako má výsledná zaokrouhlená chyba. Tento princip zaokrouhlování se provádí z důvodu toho, že více cifer ve výsledku nepotřebujeme.

Představme si, že měříme nějakou fyzikální veličinu např. modul pružnosti E jakési tyče, spočítáme nejpravděpodobnější hodnotu a dále spočteme výslednou chybu měřené veličiny ΔE . Předpokládejme, že jsme počítali na kalkulačce nebo počítači a ten na nás vychrlil následující:

$$E = 1,243625687e11 \text{ Pa}, \quad \Delta E = 1,6375986145e10 \text{ Pa},$$

Potom provedeme následující, zaokrouhlíme chybu na 2 platné cifry a na stejný počet desetinných míst i výsledek, tj. dostaneme

$$E = 124 \pm 16 \text{ GPa}.$$

Koho by snad lákalo napsat výsledek ve např. tvaru

$$E = (12,43625687 \pm 1,6375986145)e10 \text{ Pa},$$

z důvodu toho, že dosáhne vyšší přesnosti měření, když uvede všechny cifry, které se mu objevily na kalkulačce nebo na počítači, toho, bohužel, musím zklamat, jelikož žádné přesnosti neprospěl, ale naopak výsledek udělal velmi nepřehledným. Problém je v tom, že chyba měření je již v řádu $1e10$ Pa, a tudíž nemá vůbec žádný smysl uvádět nižší řády. Přidáme-li totiž například jednu další hodnotu modulu pružnosti, která se nepatrně liší od ostatních (např. v řádu kPa), potom získáme v řádu $1e10$ Pa stejnou hodnotu, ale v řádu kPa a nižších obdržíme úplně jiná čísla, než jsme měli v původním výsledku. Stejně tak u výsledné hodnoty modulu pružnosti uvádíme pouze hodnotu do řádu, ve kterém se vyskytuje chyba. Uvádění dalších desetinných míst ve výsledku je naprosto zbytečné a ničeho se tím nedosáhne.

3. Metoda postupných měření

Podstata této měřicí metody záleží na početním zpracovávání prováděného měření. Je vhodně použitelná pro měření nějaké fyzikální veličiny, které se několikrát opakuje, a to takovým způsobem, že jednotlivé měřicí kroky na sebe navazují, tj. další měření začínáme pro stejné hodnoty, kterými skončilo předchozí měření. Této metody se dá s výhodou použít např. při opakovaném měření doby periodických dějů (doby kyvu, otáček, atd.), při měření ploch planimetrem apod.

Způsob měření si můžeme osvětlit na názorném příkladě měření doby kyvu kyvadla. Počáteční čas stanovíme na 0 ($t_0 = 0$) a měříme dobu např. vždy po 10 kyvech kyvadla (interval, po kterém měříme dobu kyvu Δt by měl být vždy daleko větší nežli chyba měření času δt , jinak bychom mohli dostat naprosto znehodnocené výsledky). Provedeme-li toto měření postupně n -krát, potom rozdíly mezi jednotlivými po sobě jdoucími hodnotami měřeného času $(t_1 - t_0), \dots, (t_n - t_{n-1})$ dávají celkem n hodnot. Kdybychom jako nejpravděpodobnější hodnotu tohoto času vzali aritmetický průměr měřených rozdílů, dostali bychom

$$\bar{t} = \frac{1}{n} [(t_1 - t_0) + (t_2 - t_1) + \dots + (t_n - t_{n-1})] = \frac{t_n - t_0}{n}.$$

Výsledek je tedy roven n -tině rozdílu posledního a prvního časového okamžiku a na všech ostatních měřeních je zcela nezávislý. Pro dosažení stejného výsledku by nám tedy stačilo pouze určit počáteční časový okamžik a poté změřit $10n$ kyvů kyvadla. Jestliže tedy budeme postupovat při měření podle předchozího vztahu, potom všechny mezihodnoty budou naprosto zbytečné. Oproti právě popsanému postupu měření, kdy nevyužijeme většinu naměřených hodnot, metoda postupných měření naopak tyto hodnoty použije pro získání výsledku. V metodě postupných měření je nutné, aby celkový počet rozdílů postupně měřených hodnot byl sudý, tj. n by mělo být liché, pokud počáteční měření má index 0. Tato měření pak rozdělíme na dvě poloviny stejného počtu a utvoříme rozdíl vždy odpovídajících měření v obou skupinách. Obsahuje-li každá skupina

$$k = \frac{n+1}{2}$$

měřených hodnot, potom každý z následujících rozdílů

$$(t_k - t_0), (t_{k+1} - t_1), \dots, (t_n - t_{k-1})$$

k -násobnou hodnotu měřených 10 kyvů kyvadla. V aritmetickém průměru takto vytvořených rozdílů je rovnoměrně využito všech naměřených hodnot, ale žádná z nich se neopakuje. Dělením průměru všech rozdílů jejich počtem k dostaneme hledanou střední hodnotu měřené veličiny, tj. času deseti kyvů, jež je odvozena ze všech $n+1$ hodnot a platí

$$\bar{t} = \frac{1}{k^2} [(t_k - t_0) + (t_{k+1} - t_1) + \dots + (t_n - t_{k-1})].$$

Rozptyl měřených hodnot se vypočte z rozptylu průměru \bar{t} dělením číslem k , tj. platí

$$\sigma_t^2 = \frac{1}{k^2} [(t_k - t_0)^2 + (t_{k+1} - t_1)^2 + \dots + (t_n - t_{k-1})^2] - \frac{\bar{t}}{k}.$$

V následující tabulce je přehledně znázorněno schéma zpracování výsledků měření metodou postupných měření.

Celkem provedeno n měření (n je liché)			Rozdíly Δt_i	Rozdíly $(\Delta t_i)^2$
Pořadí	1.skupina	2.skupina		
1	t_0	t_k	$(t_k - t_0)$	$(t_k - t_0)^2$
2	t_1	t_{k+1}	$(t_{k+1} - t_1)$	$(t_{k+1} - t_1)^2$
.
.
.
k	t_{k-1}	t_n	$(t_n - t_{k-1})$	$(t_n - t_{k-1})^2$
			$\sum_{i=1}^k \Delta t_i$	$\sum_{i=1}^k (\Delta t_i)^2$

Předchozí výsledky pro střední hodnotu a rozptyl měřené veličiny tak můžeme psát přehledněji v následující formě

$$\bar{t} = \frac{\sum_{i=1}^k \Delta t_i}{k^2}, \quad \sigma_t^2 = \frac{\sum_{i=1}^k (\Delta t_i)^2}{k^2} - \frac{\bar{t}}{k}.$$

4. Aproximace naměřených dat pomocí metody nejmenších čtverců

Nejprve bude podána obecná teorie lineární *metody nejmenších čtverců*, jež bude postupně zjednodušena na některé jednoduché a významné případy. Jestliže měříme nějakou veličinu $y(\mathbf{x})$ jež je funkcí více proměnných $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)$, získáme diskrétní naměřené dvojice (y_i, \mathbf{x}_i) hodnot. Tato data je často potřebné aproximovat nějakou analytickou funkční závislostí. V obecném případě lineární metody nejmenších čtverců lze tuto závislost zapsat jako lineární kombinaci M libovolně zvolených funkcí $g_k(\mathbf{x})$, tj. můžeme psát obecný model následovně

$$\hat{y}(\mathbf{x}, a_1, \dots, a_M) = \sum_{k=1}^M a_k g_k(\mathbf{x}).$$

Funkcí $g_k(\mathbf{x})$ se též někdy nazývají *bázové funkce* a mohou být klidně nelineární, avšak linearita modelu vyplývá ze závislosti modelu v parametrech a_i . Ke zjištění parametrů a_i navrženého aproximačního modelu pro daná data a zjišťování jeho kvality se používá následující funkce (nazývaná též „chí kvadrát“)

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \left(\frac{y_i - \hat{y}(\mathbf{x}_i, a_1, \dots, a_M)}{\sigma_i} \right)^2,$$

kde y_i jsou naměřené hodnoty zkoumané veličiny v bodě \mathbf{x}_i , N je počet měření a σ_i je směrodatná odchylka (resp. chyba měření) v i -tém datovém bodě (y_i, \mathbf{x}_i) . O této odchylce σ_i se předpokládá, že je předem známa, a pokud není známa, tak může být pro všechna data položena $\sigma = 1$. Z teorie metody nejmenších čtverců je známo, že jako parametry jež nejvhodněji aproximují zadaná data, musíme zvolit ty parametry a_i , které minimalizují uvedenou funkci χ^2 . Provedeme-li derivaci funkce χ^2 podle jednotlivých parametrů a_i , potom dostaneme tzv. *normální rovnice* ve tvaru

$$0 = \sum_{i=1}^N \frac{1}{\sigma_i} \left[y_i - \sum_{j=1}^M a_j g_j(\mathbf{x}_i) \right] g_k(\mathbf{x}_i), \quad k = 1, \dots, M.$$

Nechť \mathbf{A} je matice o rozměrech $N \times M$, která je vytvořena z naměřených dat následujícím způsobem. Pro jednotlivé prvky matice platí

$$A_{ij} = \frac{g_j(\mathbf{x}_i)}{\sigma_i}.$$

Podobně definujme vektor \mathbf{b} , jež má délku N , a vektor parametrů a_i označme jako \mathbf{a} . Pro prvky vektoru \mathbf{b} platí

$$b_i = \frac{y_i}{\sigma_i}.$$

Normální rovnice, jež byly odvozeny můžeme velmi elegantně přepsat pomocí zavedených matic a vektorů do tvaru

$$(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) \mathbf{a} = \mathbf{A}^T \mathbf{b}.$$

Lze dokázat, že inverzní matice k matici soustavy normálních rovnic $\mathbf{C} = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1}$ úzce souvisí s nejistotou odhadu parametrů modelu \mathbf{a} . Rozptyl odhadnutých parametrů daného modelu je poté

$$\sigma^2(a_j) = C_{jj},$$

kde C_{jj} je prvek matice C . Normální rovnice se obvykle řeší některou z numerických metod lineární algebry. V některých případech se může stát, že matice soustavy normálních rovnic je špatně podmíněná, potom pro řešení musíme použít jiné numerické metody.

Jako velmi zjednodušený lineární aproximační model zde bude uvedeno proložení naměřených dat přímkou. Dále předpokládejme, že pro všechny body měření platí $\sigma = 1$, tj. u všech naměřených hodnot předpokládáme stejné rozdělení chyb měření. Měříme-li tedy nějakou veličinu $y(x)$ jež je funkcí jedné proměnné x , potom dostaneme množinu N naměřených dvojic (x_i, y_i) . Naměřenou závislost chceme aproximovat lineárním modelem (přímkou) ve tvaru

$$\hat{y} = \hat{y}(x, a, b) = a + bx,$$

kde a a b jsou neznámé parametry této funkce. Tento problém se také často nazývá *lineární regrese*. Abychom mohli najít nejlepší odhady parametrů a a b , musíme minimalizovat následující funkci χ^2 vzhledem k hledaným parametrům

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^N \left(\frac{y_i - \hat{y}(x_i, a, b)}{\sigma_i} \right)^2.$$

Jestliže tedy provedeme derivace této funkce podle parametrů, potom dostaneme následující dvě normální rovnice

$$0 = \frac{\partial \chi^2}{\partial a} = \sum_{i=1}^N [y_i - (a + bx_i)] \quad \text{a} \quad 0 = \frac{\partial \chi^2}{\partial b} = \sum_{i=1}^N x_i [y_i - (a + bx_i)].$$

Pokud si nyní označíme některé součty v těchto rovnicích jako

$$S_x = \sum_{i=1}^N x_i, \quad S_y = \sum_{i=1}^N y_i, \quad S_{xx} = \sum_{i=1}^N x_i^2, \quad S_{xy} = \sum_{i=1}^N x_i y_i,$$

potom lze normální rovnice jednoduchým způsobem zapsat

$$\begin{aligned} Na + bS_x &= S_y \\ aS_x + bS_{xx} &= S_{xy} \end{aligned}$$

Z této soustavy již velmi snadno spočítáme např. pomocí Cramerova pravidla neznámé parametry a a b . Dostáváme

$$D = NS_{xx} - S_x^2, \quad a = \frac{S_{xx}S_y - S_xS_{xy}}{D}, \quad b = \frac{NS_{xy} - S_xS_y}{D}.$$

Uvedená metoda lineární regrese je též vhodná i pro aproximaci dat jinými modely než pouze přímkou. Obecně lze využít předcházející rovnice k aproximaci dat ve tvaru

$$\hat{y} = \hat{y}(x, \alpha, \beta) = \alpha + \beta f(x),$$

kde $f(x)$ je známá funkce nezávislé proměnné x . Položíme-li v předcházejícím případě lineární regrese $x = f(x)$, potom je úloha převedena na aproximaci regresní přímkou. Nejčastějšími případy aproximujících závislostí jsou:

$$\hat{y} = \alpha + \beta \log x, \quad x > 0,$$

$$\hat{y} = \alpha + \beta x^r,$$

$$\hat{y} = \alpha + \beta \exp x,$$

Literatura:

- [1] Horák Z., Krupka F., Šindelář V.: Technická fyzika. SNTL, Praha 1961.
- [2] Horák Z.: Praktická fyzika. SNTL, Praha 1958.
- [3] Brož J. a kol.: Základy fyzikálních měření I. SPN, Praha 1967
- [4] Press W.H., Teukolsky S.A., Vetterling W.T., Flannery B.P.: Numerical Recipes in C. The Art of Scientific Computing. Cambridge University Press, Cambridge 1991
- [5] Rektorys K. a kol.: Přehled užité matematiky. Prometheus, Praha 1995