Speciální teorie relativity

1. Energie relativistických mionů je $E = 3\,\mathrm{GeV}$. Určete dráhu *L*, kterou urazí za dobu své existence, jestliže klidová energie mionu je $E_0 = 100\,\mathrm{MeV}$ a doba existence mionu z hlediska externího pozorovatele je $t_0 = 2{,}2 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{s}$.

Řešení:
Pro energii *E* a dobu existence *t* mionu z hlediska soustavy vztažené k pohybující se částici platí

$$t = \frac{t_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \qquad E = \frac{E_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}}.$$

Z předchozích vztahů plyne

$$v = c\sqrt{1-\left(\frac{E_0}{E}\right)^2}, \qquad t = t_0\frac{E}{E_0}, \qquad L = vt = ct_0\sqrt{1-\left(\frac{E_0}{E}\right)^2}\,\frac{E}{E_0} = 19{,}8\,\mathrm{km}.$$

2. V urychlovači mají protony kinetickou energii $E_k = 76\,\mathrm{GeV}$. Určete hmotnost *m* a rychlost *v* urychlovaných částic. Klidová hmotnost protonu $m_0 = 1{,}6726 \cdot 10^{-27}\,\mathrm{kg}$ a rychlost světla $c \doteq 3 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}$.

Řešení:
Celková energie *E* urychleného protonu je

$$E = E_k + E_0 = E_k + m_0c^2 = mc^2 = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}},$$

a tedy pro hmotnost *m* resp. rychlost *v* protonu získáme

$$m = \left(m_0 + \frac{E_k}{c^2}\right) \approx 82{,}2m_0 = 1{,}38 \cdot 10^{-25}\,\mathrm{kg}$$

a $$v = \frac{c}{E_k + m_0c^2}\sqrt{E_k(E_k + 2m_0c^2)} \approx 0{,}9999c.$$

3. Dvě částice se pohybují proti sobě rychlostmi $v_1 = v_2 = 0{,}75c$, kde $c \doteq 3 \cdot 10^8$ m/s je rychlost světla. Určete, jakou výslednou rychlostí *v* se k sobě obě částice vzájemně přibližují.

Řešení:
Pro relativistické sčítání rychlostí částic, které se pohybují proti sobě v jednom směru, platí

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}} = \frac{1{,}5c}{1 + \frac{9}{16}} = 0{,}96c\,.$$

4. Určete, o kolik se zvýší hmotnost částice s klidovou hmotností m_0 a nábojem *Q*, která bude urychlena v homogenním elektrickém poli s rozdílem potenciálů *U*.

Řešení:
Kinetická energie E_k, kterou získá částice urychlením v elektrickém poli je rovna $E_k = QU$. Pro celkovou energii *E* pohybující se částice platí

$$E = mc^2 = E_k + E_0 = E_k + m_0 c^2\,.$$

Pro změnu hmotnosti Δm částice poté můžeme vyjádřit

$$\Delta m = m - m_0 = E_k / c^2 = QU / c^2\,.$$

5. Elektron se pohybuje v homogenním magnetickém poli s indukcí $B = 10^{-2}\,\mathrm{T}$ po kružnici o poloměru $r = 10\,\mathrm{cm}$. Určete rychlost v elektronu, jestliže jeho klidová hmotnost je $m_0 = 9{,}1095 \cdot 10^{-31}\,\mathrm{kg}$.

Řešení:
Na elektron působí v magnetickém poli Lorentzova síla $\mathbf{F}_L = Q(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$, kde **v** je rychlost, **B** je vektor magnetické indukce a $Q = 1{,}602 \cdot 10^{-19}\,C$ je elementární náboj, který nese elektron. Tato síla musí být v rovnováze s odstředivou silou F_o, jež má opačný směr a působí na elektron při pohybu po kruhové dráze, tj. platí $F_o = F_L$

$$F_o = m\frac{v^2}{r},$$

$$F_L = QvB,$$

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \qquad \Rightarrow \qquad v = \frac{QBr}{\sqrt{m_0^2 c^2 + (QBr)^2}}\,c = 0{,}871c = 2{,}61 \cdot 10^8\,\mathrm{m/s}.$$