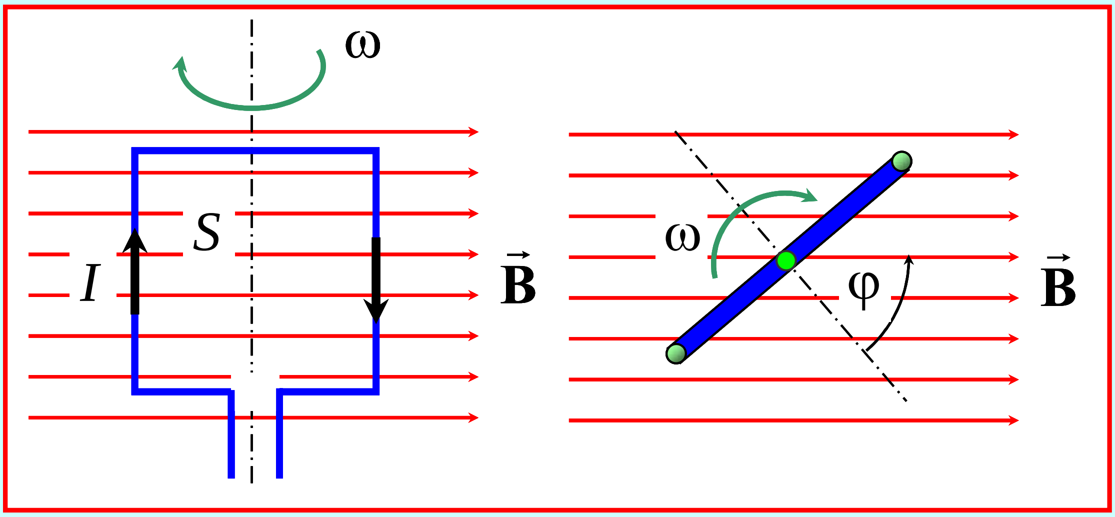
Elektromagnetická indukce, střídavé proudy

12. V homogenním magnetickém poli s indukcí B se rovnoměrně otáčí s kruhovou frekvencí ω kolem své osy obdélníkový závit s plochou S. Závit se otáčí kolmo na směr magnetického pole. Určete maximální hodnotu elektromotorického napětí U_i, které se indukuje v závitu při jeho otáčení v magnetickém poli.

<u>Řešení</u>:
Jestliže se závit otáčí rovnoměrně v magnetickém poli, potom platí pro magnetický indukční tok $\Phi = BS\cos\omega t$. Pro časovou změnu magnetického indukčního toku dostaneme

$$\mathrm{d}\Phi = -BS\omega\sin\omega t\,\mathrm{d}t \;.$$



Elektromotorické napětí indukované v závitu je potom rovno

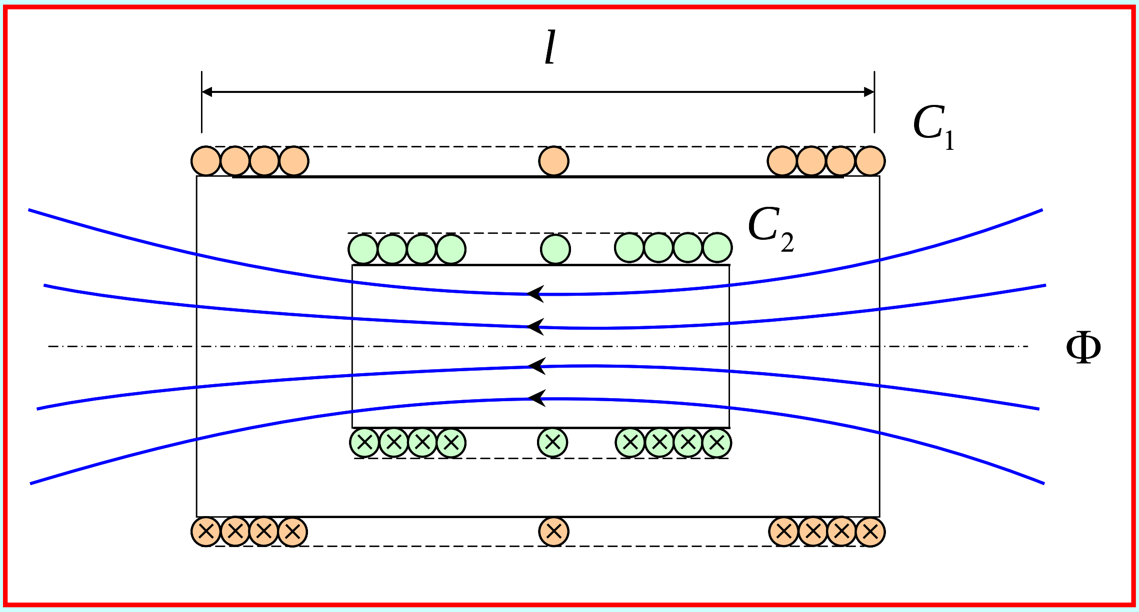
$$U_i = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = BS\omega\sin\omega t \;.$$

Maximální hodnota indukovaného napětí je tedy rovna $U_{i,\max} = BS\omega$.

13. Určete vzájemnou indukčnost L_{12} dvou cívek C_1 a C_2. Cívka C_2 je zasunuta uvnitř cívky C_1. Cívka C_2 má $N_2 = 300$ závitů a plošný průřez $S_2 = 5\ \mathrm{cm}^2$. Cívka C_1 má $N_1 = 1000$ závitů a délku $l = 30\ \mathrm{cm}$, přičemž osy obou cívek splývají. Určete, jaké maximální napětí $U_{i,\max}$ se bude indukovat v cívce C_2, jestliže se proud i procházející cívkou C_1 bude harmonicky měnit s frekvencí $f = 50\ \mathrm{s}^{-1}$ a amplitudou $I_m = 5\ \mathrm{A}$.

Řešení: Jestliže vnější cívkou C_1 prochází elektrický proud I, potom velikost indukce magnetického pole na ose cívky je dána vztahem

$$B = \mu_0 \frac{N_1 I}{l}.$$



Vzhledem k tomu, že magnetické pole v cívce C_2 můžeme považovat prakticky za homogenní, bude magnetický indukční tok Φ, který teče průřezem cívky C_2, a vzájemná indukčnost cívek

$$\Phi = N_2 B S_2 = \mu_0 \frac{N_1 N_2 I}{l} S_2 \qquad \text{a} \qquad L_{12} = \frac{\Phi}{I} = \mu_0 \frac{N_1 N_2}{l} S_2 = 6{,}28 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{H}.$$

Indukované elektromotorické napětí v cívce C_2 potom určíme ze vztahu

$$U_i = -L_{12}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = -L_{12}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(I_m \sin \omega t) = -\frac{L_{12} I_m}{\omega}\cos \omega t \quad \Rightarrow \quad U_{i,\max} = \frac{L_{12} I_m}{2\pi f} = 10^{-5}\,\mathrm{V}.$$

14. V obvodu střídavého proudu s frekvencí $\nu = 50\ \mathrm{Hz}$ a amplitudou napětí $U = 300\ \mathrm{V}$ je sériově zařazen kondenzátor kapacity C, rezistor $R = 50\ \Omega$ a cívka s indukčností $L = 0{,}1\ \mathrm{H}$. Poměr napětí $U_1 : U_2 = 1 : 2$. Určete kapacitu C kondenzátoru a amplitudu proudu I protékajícího obvodem.

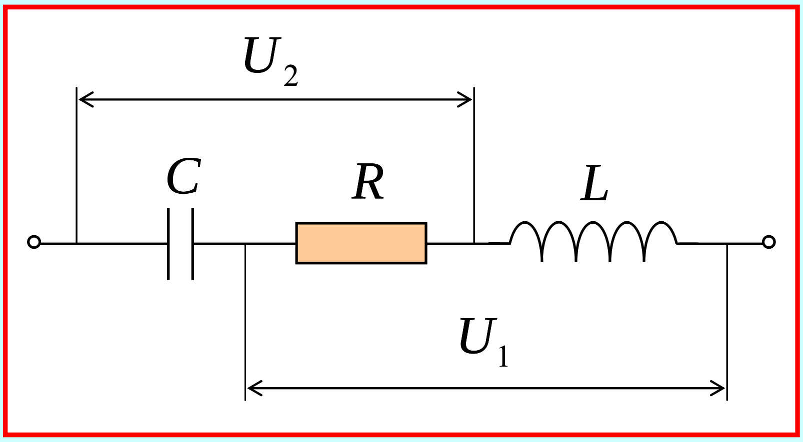
Řešení:

Pro napětí U_1 (na cívce a rezistoru) resp. U_2 (na kondenzátoru a rezistoru) platí

$$U_1 = I\sqrt{R^2 + R_L^2} = I\sqrt{R^2 + (\omega L)^2}\ ,$$

$$U_2 = I\sqrt{R^2 + R_C^2} = I\sqrt{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}}\ ,$$

kde R_L resp. R_C je induktance resp. kapacitance a $\omega = 2\pi\nu$ je kruhová frekvence.



Ze vztahu pro poměr napětí $U_1 : U_2$ můžeme vyjádřit velikost kapacity kondenzátoru, tj.

$$\left(\frac{U_1}{U_2}\right)^2 = \frac{1}{4} = \frac{R^2 + (\omega L)^2}{R^2 + \frac{1}{(\omega C)^2}} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{1}{\omega\sqrt{3R^2 + 4(\omega L)^2}} = 29{,}8 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{F}\,.$$

Pro velikost amplitudy proudu poté platí

$$I = \frac{U}{Z} = \frac{U}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} = 3{,}32\ \mathrm{A}\,,$$

kde Z je celková impedance obvodu.

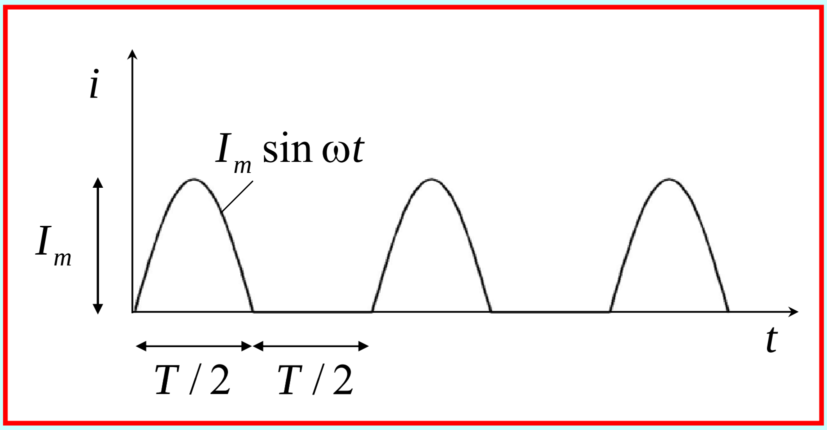
15. Vypočtěte efektivní a střední hodnotu proudu, který vznikne usměrněním harmonického střídavého proudu s frekvencí ω.

Řešení:

Efektivní hodnota I_e proměnného proudu i je definována jako velikost stálého stejnosměrného proudu, který vyvine ve stejném odporu R v téže době stejné množství tepla, tj.

$$RI_e^2 t = \int_0^t Ri^2 \mathrm{d}t \,,$$

$$I_e^2 = \frac{1}{t}\int_0^t i^2 \mathrm{d}t \,.$$



U periodického průběhu elektrického proudu tedy dostaneme I_e časovým středováním přes jednu periodu ($t = T$). Pro náš případ tedy

$$t \in \langle 0, T/2 \rangle \;\Rightarrow\; i(t) = I_m \sin \omega t \,, \qquad \omega = 2\pi/T \,,$$

$$t \in \langle T/2, T \rangle \;\Rightarrow\; i(t) = 0 \,,$$

a velikost efektivní hodnoty proudu

$$I_e^2 = \frac{1}{T}\int_0^T i^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^{T/2} I_m^2 \sin^2 \omega t \,\mathrm{d}t = \frac{I_m^2}{2T}\int_0^{T/2} (1 - \cos 2\omega t)\,\mathrm{d}t = \frac{I_m^2}{2T}\left[t - \frac{\sin 2\omega t}{2\omega} \right]_0^{T/2} = \frac{I_m^2}{4}$$

a tedy $I_e = I_m/2$. Střední hodnota proudu I_s je střední časovou hodnotou proudu, tj. pro náš případ

$$I_s = \frac{1}{T}\int_0^T i \,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\int_0^{T/2} I_m \sin \omega t \,\mathrm{d}t = \frac{I_m}{2T}\left[-\frac{\cos \omega t}{\omega} \right]_0^{T/2} = \frac{I_m}{2\pi} \,.$$