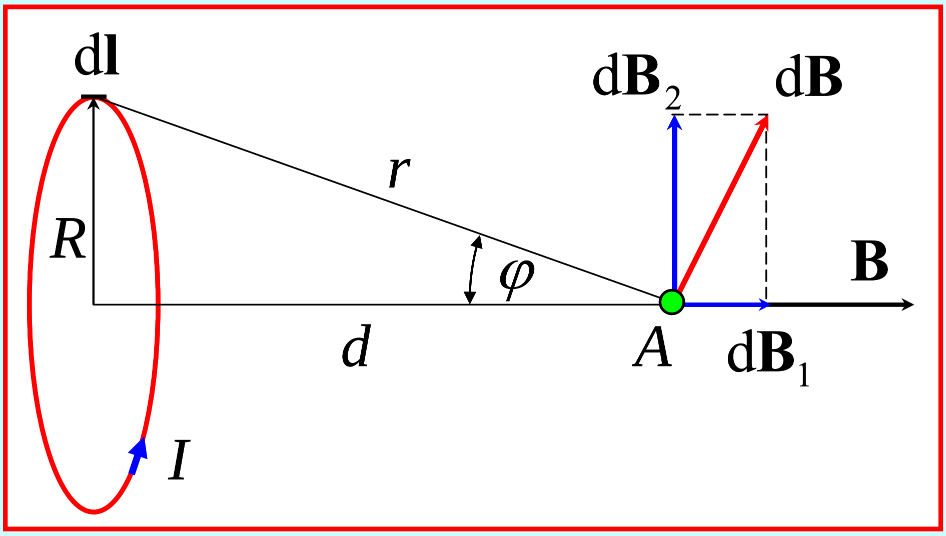
Magnetické pole

8. Vypočtěte magnetickou indukci B kruhové smyčky o poloměru $R = 5\ \mathrm{cm}$ na její ose symetrie ve vzdálenosti $d = 10\ \mathrm{cm}$ od roviny smyčky, jestliže smyčkou protéká elektrický proud $I = 10\ \mathrm{A}$.

Řešení: Pro příspěvek k magnetické indukci v bodě A platí podle Biot-Savartova zákona

$$\mathrm{d}B = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{|\mathrm{d}\mathbf{l}\times\mathbf{r}|}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\mathrm{d}l}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{\mathrm{d}l}{(R^2+d^2)}\,.$$



Výsledný příspěvek d**B** můžeme rozložit do dvou směrů (ve směru osy a kolmo na ní), tj.

$$\mathrm{d}B_1 = \mathrm{d}B\sin\varphi\,, \qquad \mathrm{d}B_2 = \mathrm{d}B\cos\varphi\,, \qquad \sin\varphi = \frac{R}{\sqrt{R^2+d^2}}\,.$$

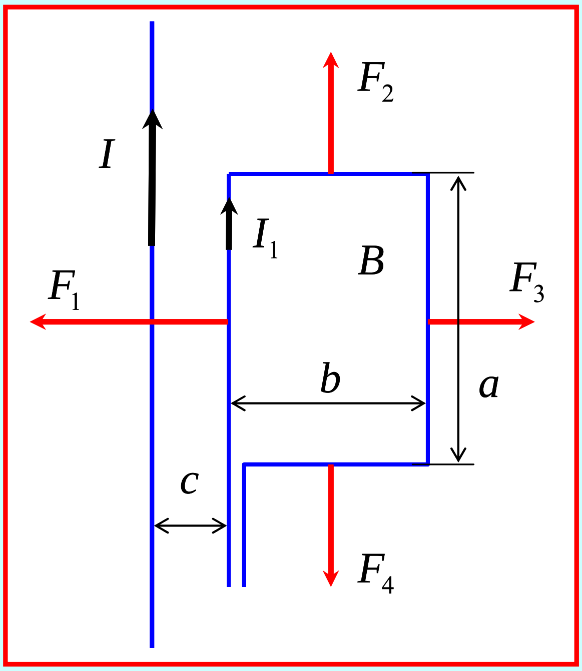
Vzhledem k symetrii úlohy bude platit $\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 = \sum \mathrm{d}\mathbf{B}_1$, $\mathbf{B}_2 = \sum \mathrm{d}\mathbf{B}_2 = \mathbf{0}$. Pro výslednou magnetickou indukci tedy integrací získáme

$$B = \int \mathrm{d}B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\int_0^{2\pi R}\frac{R\mathrm{d}l}{(R^2+d^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi}\frac{2\pi R^2}{(R^2+d^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{2}\frac{R^2}{(R^2+d^2)^{3/2}} = 11{,}2\cdot 10^{-6}\,\mathrm{T}\,.$$

9. Obdélníková smyčka se stranami $a = 40\ \mathrm{cm}$, $b = 30\ \mathrm{cm}$ leží v jedné rovině s dlouhým přímým vodičem, kterým protéká proud $I = 6\ \mathrm{A}$. Vodič je rovnoběžný se stranou a smyčky a je od ní vzdálen $c = 10\ \mathrm{cm}$. Smyčkou protéká elektrický proud o velikosti $I_1 = 1\ \mathrm{A}$. Určete jakou silou F působí vodič na jednotlivé strany smyčky.

Řešení:

Sílu d**F**, která působí na element d**l** proudovodiče (smyčky), lze určit pomocí Ampérova zákona jako $\mathrm{d}\mathbf{F} = I(\mathrm{d}\mathbf{l} \times \mathbf{B})$, kde I je proud protékající smyčkou a B je velikost indukce magnetického pole v daném místě, kde se element vodiče nachází.



Pro indukci magnetického pole dlouhého přímého vodiče ve vzdálenosti r platí

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}.$$

Pro velikost sil působících na jednotlivé strany smyčky platí

$$F_1 = \int_0^a I_1 B_1 \mathrm{d}l = \int_0^a I_1 \frac{\mu_0 I}{2\pi c} \mathrm{d}l = \frac{\mu_0 I_1 I a}{2\pi c} = 4{,}8\,\mu\mathrm{N},$$

$$F_2 = F_4 = \int_c^{c+b} I_1 B_2 \mathrm{d}l = \int_c^{c+b} I_1 \frac{\mu_0 I}{2\pi l} \mathrm{d}l = \frac{\mu_0 I_1 I}{2\pi} \ln \frac{c+b}{c} = 1{,}66\,\mu\mathrm{N},$$

$$F_3 = \int_0^a I_1 B_3 \mathrm{d}l = \int_0^a I_1 \frac{\mu_0 I}{2\pi(c+b)} \mathrm{d}l = \frac{\mu_0 I_1 I a}{2\pi(c+b)} = 1{,}2\,\mu\mathrm{N}.$$

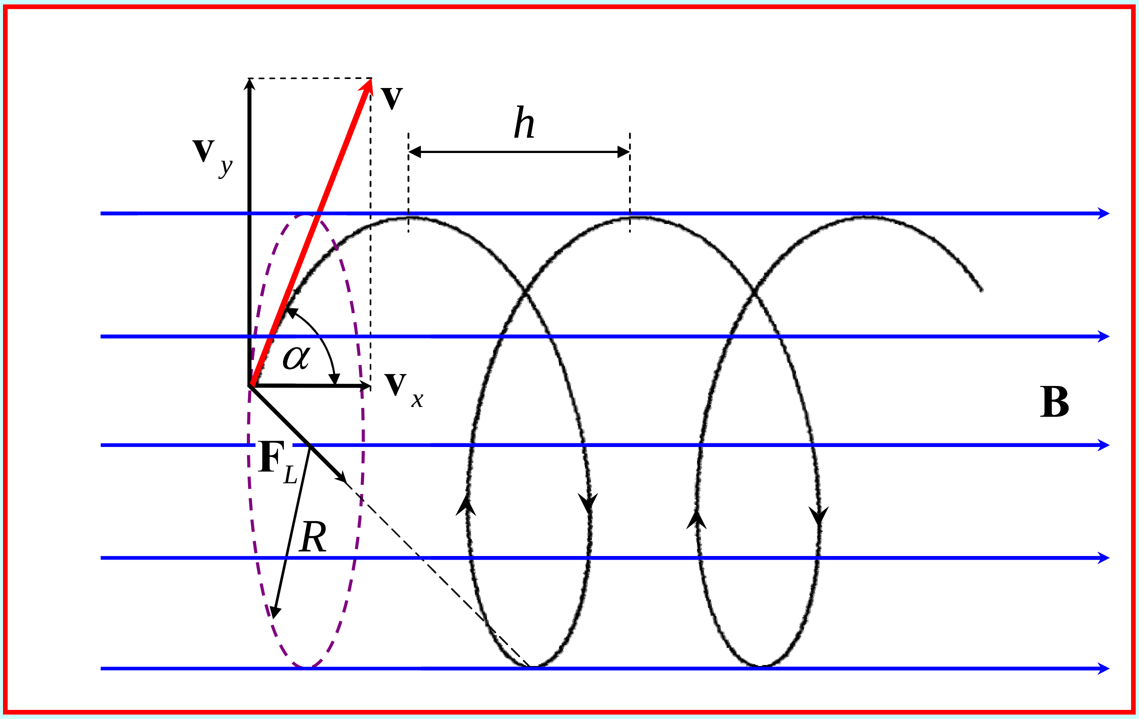
Na smyčku tedy bude působit výsledná přitažlivá síla $F = F_1 - F_3 = 3{,}6\ \mu\mathrm{N}$.

10. Elektron vletí malou rychlostí $v << c$ (c je rychlost světla) do homogenního magnetického pole s indukcí B tak, že vektor **v** počáteční rychlosti svírá se směrem vektoru magnetické indukce **B** úhel α. Po jaké dráze se bude v magnetickém poli elektron dále pohybovat.

Řešení:

Na elektron v magnetickém poli působí Lorentzova síla $\mathbf{F}_L = e(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$, kde $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ je vektor rychlosti elektronu, $\mathbf{B} = (B_x, 0, 0)$ je vektor magnetické indukce a e je náboj elektronu. Pro sílu působící na elektron tedy dostáváme $\mathbf{F}_L = (0, eB_x v_z, -eB_x v_y)$. Dosazením do pohybové rovnice získáme tři skalární rovnice

$$m_e \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = 0\,, \qquad m_e \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = eB_x v_z\,, \qquad m_e \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = -eB_x v_y\,.$$



Řešením první rovnice vychází, že ve směru magnetického pole (osa x) se bude elektron pohybovat konstantní rychlostí $v_x = v\cos\alpha$. Třetí rovnici vynásobíme imaginární jednotkou i a sečteme s druhou rovnicí, tj. dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(v_y + iv_z) = -i\omega(v_y + iv_z)\,, \qquad \omega = \frac{eB_x}{m_e}\,.$$

Substitucí $w = v_y + iv_z$ a řešením této diferenciální rovnice získáme

$$w = v_y + iv_z = v_0 e^{-i(\omega t + \varphi)} \quad \Rightarrow \quad v_y = v_0 \cos(\omega t + \varphi) \quad \text{a} \quad v_z = -v_0 \sin(\omega t + \varphi)\,,$$

kde integrační konstanty v_0 a φ určíme z počátečních podmínek pro náš případ, tj.

$$t = 0 \quad \Rightarrow \qquad v_y = v\sin\alpha\,, \quad v_z = 0\,, \qquad\qquad x = y = z = 0\,.$$

Potom tedy $\varphi = 0$ a $v_0 = v\sin\alpha$. Integrací rychlosti podle času získáme dráhu částice, tj.

$$x = x_0 + vt\cos\alpha\,,$$

$$y = y_0 + \frac{v_0}{\omega}\sin\omega t\,,$$

$$z = z_0 + \frac{v_0}{\omega}\cos\omega t\,,$$

kde integrační konstanty $x_0 = y_0 = 0$, $z_0 = -v_0/\omega$.

Z předchozích rovnic je vidět, že trajektorií, po které se bude částice pohybovat je šroubovice s poloměrem R a stoupáním h, kde

$$R = \frac{v_0}{\omega} = \frac{m_e v\sin\alpha}{eB_x} \qquad \text{a} \qquad h = vT\cos\alpha = \frac{2\pi m_e v\cos\alpha}{eB_x}\,.$$

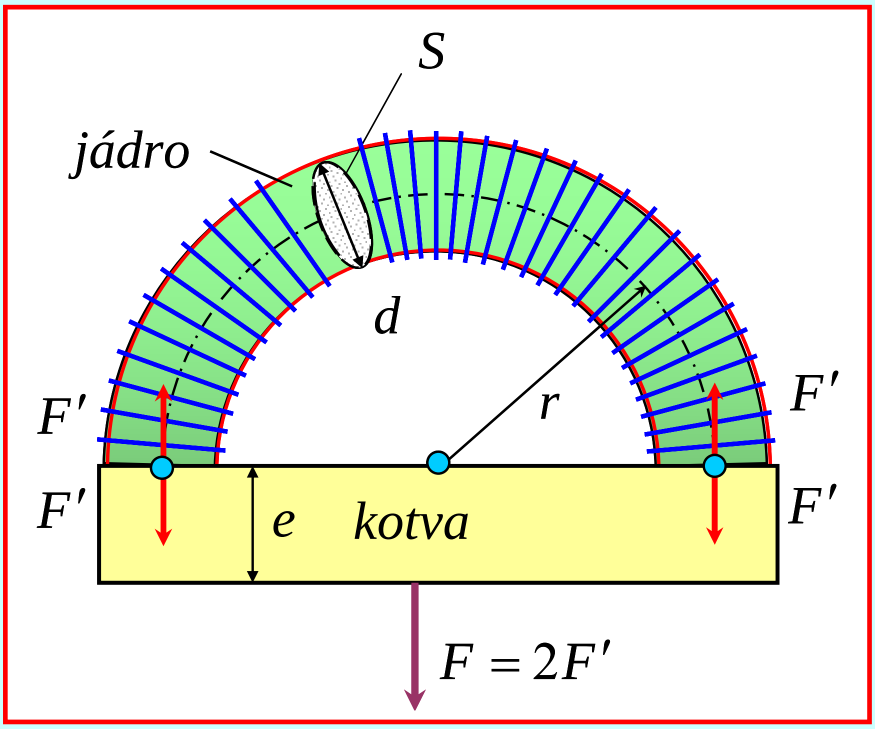
11. Vypočtěte, jaký počet závitů N musíme navinout na jádro elektromagnetu tvaru oblouku půlkružnice o průřezu $S = 30\ \mathrm{cm}^2$ a poloměru oblouku $r = 40\ \mathrm{cm}$, jestliže chceme, aby kotva elektromagnetu vydržela zatížení silou $F = 10\ \mathrm{kN}$. Jádro má průměr $d = 10\ \mathrm{cm}$, kotva má čtvercový příčný průřez o hraně $e = 10\ \mathrm{cm}$ Jádro elektromagnetu je tvořeno magneticky měkkou ocelí, jejíž relativní permeabilita závisí na velikosti indukce magnetického pole a v rozsahu hodnot $B = (0 - 1{,}7)\ \mathrm{T}$ je přibližně dána pomocí vztahu $\mu_r(B) = 250 + 12411B - 7387B^2$. Závity elektromagnetu protéká proud $I = 1\ \mathrm{A}$.

Řešení: Jádro elektromagnetu přitahuje kotvu magnetickou silou F (dvojnásobek síly působící na jeden pól magnetu), tj.

$$F = 2wS = 2\frac{1}{2}BHS = \frac{B^2}{\mu_0}S\,,$$

kde w je hustota energie magnetického pole elektromagnetu, B resp. H je indukce resp. intenzita tohoto pole ve styčné ploše mezi jádrem a kotvou. Vyjádříme-li si působící sílu pomocí magnetického toku Φ, potom platí

$$\Phi = BS \qquad \Rightarrow \qquad F = \Phi^2/(\mu_0 S)\,.$$



Jádro elektromagnetu a kotva tvoří uzavřený magnetický obvod, který vzhledem k vysoké hodnotě permeability μ oproti okolnímu prostředí μ_0 ($\mu >> \mu_0$) můžeme dostatečně přesně považovat za magnetickou trubici v níž jsou magnetické indukční linie kolmé na průřez S a magnetický tok je soustředěn v jádře. Podle zákona celkového proudu poté dráhový integrál po ose magnetické trubice je

$$\oint \mathbf{H}\mathrm{d}\mathbf{l} = \oint \frac{\mathbf{B}}{\mu}\mathrm{d}\mathbf{l} = \oint \frac{B}{\mu}\mathrm{d}l = NI \qquad \text{a} \qquad B = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}S} \qquad \Rightarrow$$

$$\mathrm{d}\Phi \cdot \oint \frac{\mathrm{d}l}{\mu \mathrm{d}S} = \mathrm{d}\Phi \cdot R_m = NI \,,$$

kde veličina R_m se nazývá magnetický odpor. Skládá-li se magnetický obvod z několika úseků s různými středními délkami l_k , průřezy S_k a hodnotami magnetického odporu R_{mk}, potom pro magnetický tok platí

$$\Phi = NI \Big/ \sum_k R_{mk} \,, \qquad R_{mk} = l_k /(\mu S_k) \,.$$

Náš magnetický obvod (elektromagnet) budeme charakterizovat střední indukční linií v jádře a kotvě elektromagnetu. Potom přibližně platí

$$F = \frac{\Phi^2}{\mu_0 S} = \frac{N^2 I^2}{\mu_0 S R_m^2} = \frac{\mu_0 \mu_r^2 N^2 I^2 S}{\bar{l}^{\,2}} \,, \quad \text{kde} \quad R_m = \frac{\pi r + e + 2r}{\mu S} = \frac{\bar{l}}{\mu_0 \mu_r S} \,, \quad S = \pi d^2 / 4$$

a $\mu_r \doteq 4130$ jsme si určili pro hodnotu magnetické indukce $B = \sqrt{\mu_0 F / S}$. Z předchozích vztahů tedy dostaneme pro nutný počet závitů

$$N = \frac{\sqrt{\mu_0 S F}\, R_m}{I} = \sqrt{\frac{F}{\mu_0 S}}\, \frac{\bar{l}}{\mu_r I} \doteq 1652 \,.$$