Elektrostatické pole

Elektrický proud v látkách

1. Měděným vodičem o průřezu $S = 0{,}64\ \mathrm{mm}^2$ protéká elektrický proud $I = 24\ \mathrm{A}$. Vypočtěte střední rychlost v pohybu volných elektronů ve vodiči, jestliže předpokládáme, že počet volných elektronů v jednotkovém objemu je roven počtu atomů N_0 v jednotkovém objemu vodiče.

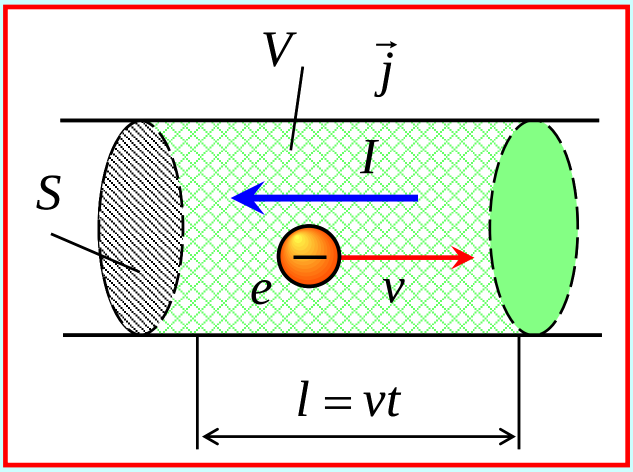
Řešení: Pro střední rychlost elektronů platí $v = L/t$, kde t je čas, za který všechny volné elektrony v daném objemu urazí dráhu L, přičemž přenesou náboj $Q = Ne$. Pro proud I a počet volných elektronů N platí

$$N = N_0 V = N_0 SL\,,$$

$$I = \frac{Q}{t} = \frac{Ne}{t} = \frac{N_0 SLe}{t}\,,$$

kde V je objem vodiče, $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C}$ je náboj elektronu. Počet atomů v jednotce objemu

$$N_0 = \frac{N}{V} = \frac{nN_A}{V} = \frac{mN_A}{M_m V} = \frac{\rho N_A}{M_m}\,,$$



kde n je látkové množství, $N_A = 6{,}022 \cdot 10^{23}\ \mathrm{mol}^{-1}$ je Avogadrova konstanta, $\rho = 8{,}9\ \mathrm{g/cm}^3$ je hustota a $M_m = 63{,}54 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg/mol}$ je molární hmotnost materiálu vodiče. Pro procházející elektrický proud a následně i pro střední rychlost elektronů dostáváme vztahy

$$I = \frac{\rho N_A SLe}{M_m t} \qquad \Rightarrow \qquad v = \frac{L}{t} = \frac{M_m I}{\rho N_A Se} = 2{,}78\ \mathrm{mm/s}\,.$$

2. Určete vztahy pro trasnsfiguraci zapojení elektrických odporů trojúhelník → hvězda a hvězda → trojúhelník (viz.obr.).

Řešení: Chceme nahradit skupinu odporů jinou skupinou, která je s ní ekvivalentní (tj. jejíž zapojení do obvodu na místě původní skupiny nemá vliv na elektrické veličiny v jiné části obvodu). Takováto změna konfigurace umožňuje často získat výhodnější a jednodušší zapojení pro další výpočet.
Aby náhrada odporového trojúhelníka hvězdou neměla vliv na ostatní větve obvodu, musí zůstat výsledné odpory mezi uzly 1-3, 2-3, 3-1 stejné. Musí tedy platit

$$R_{01} + R_{02} = \frac{R_{12}(R_{23} + R_{13})}{R_{12} + R_{23} + R_{13}}, \quad R_{02} + R_{03} = \frac{R_{23}(R_{12} + R_{13})}{R_{12} + R_{23} + R_{13}}, \quad R_{01} + R_{03} = \frac{R_{13}(R_{12} + R_{23})}{R_{12} + R_{23} + R_{13}}.$$

Úpravou předchozích vztahů získáme pro výsledné odpory R_{01}, R_{02} a R_{03}

$$R_{01} = \frac{R_{12}R_{13}}{R_{12} + R_{23} + R_{13}}, \qquad R_{02} = \frac{R_{12}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{13}}, \qquad R_{03} = \frac{R_{13}R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{13}}.$$

Pro náhradu zapojení do hvězdy odporovým trojúhelníkem najdeme nejjednodušeji neznámé odpory R_{12}, R_{23} a R_{13} tím, že porovnáme vodivost $G = 1/R$ mezi jednotlivými uzly. Platí

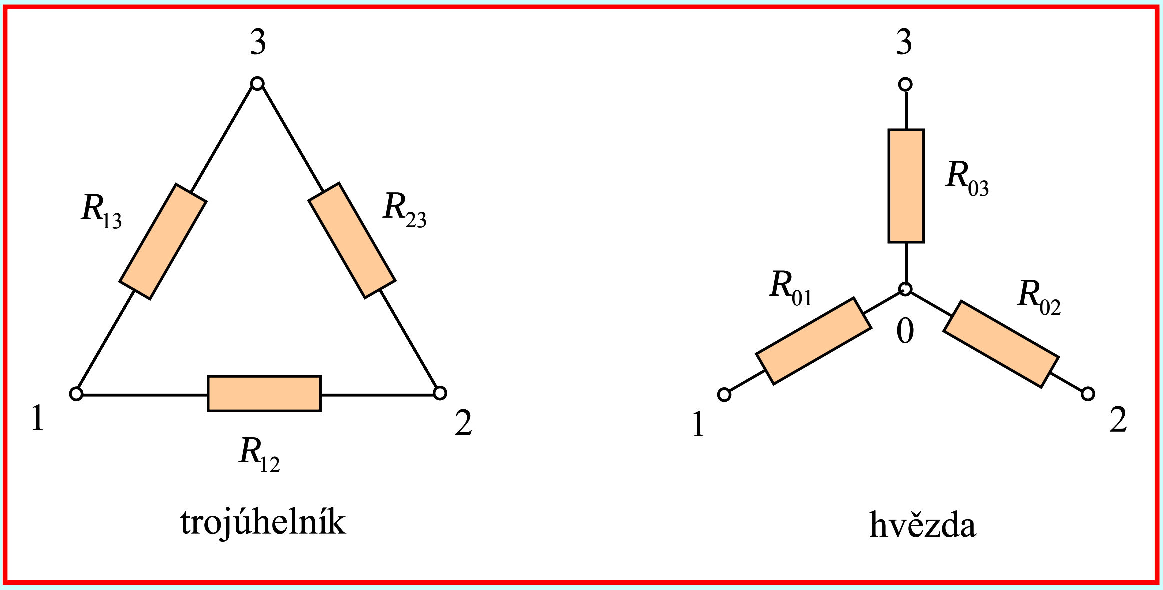
$$G_{12} + G_{13} = \frac{G_{01}(G_{02} + G_{03})}{G_{01} + G_{02} + G_{03}}, \qquad G_{23} + G_{12} = \frac{G_{02}(G_{01} + G_{03})}{G_{01} + G_{02} + G_{03}}, \qquad G_{13} + G_{23} = \frac{G_{03}(G_{01} + G_{02})}{G_{01} + G_{02} + G_{03}}.$$

Úpravou získáme obdobně jako v předchozím případě (transfigurace trojúhelník → hvězda)

$$G_{12} = \frac{G_{01}G_{02}}{G_{01} + G_{02} + G_{03}}, \qquad G_{23} = \frac{G_{02}G_{03}}{G_{01} + G_{02} + G_{03}}, \qquad G_{13} = \frac{G_{01}G_{03}}{G_{01} + G_{02} + G_{03}}.$$

Abychom dostali vztah pro odpory, dosadíme za vodivosti jednotlivých větví $G_{ij} = 1/R_{ij}$ a dostaneme

$$R_{12} = R_{01} + R_{02} + \frac{R_{01}R_{02}}{R_{03}}, \qquad R_{23} = R_{02} + R_{03} + \frac{R_{02}R_{03}}{R_{01}}, \qquad R_{13} = R_{01} + R_{03} + \frac{R_{01}R_{03}}{R_{02}}.$$

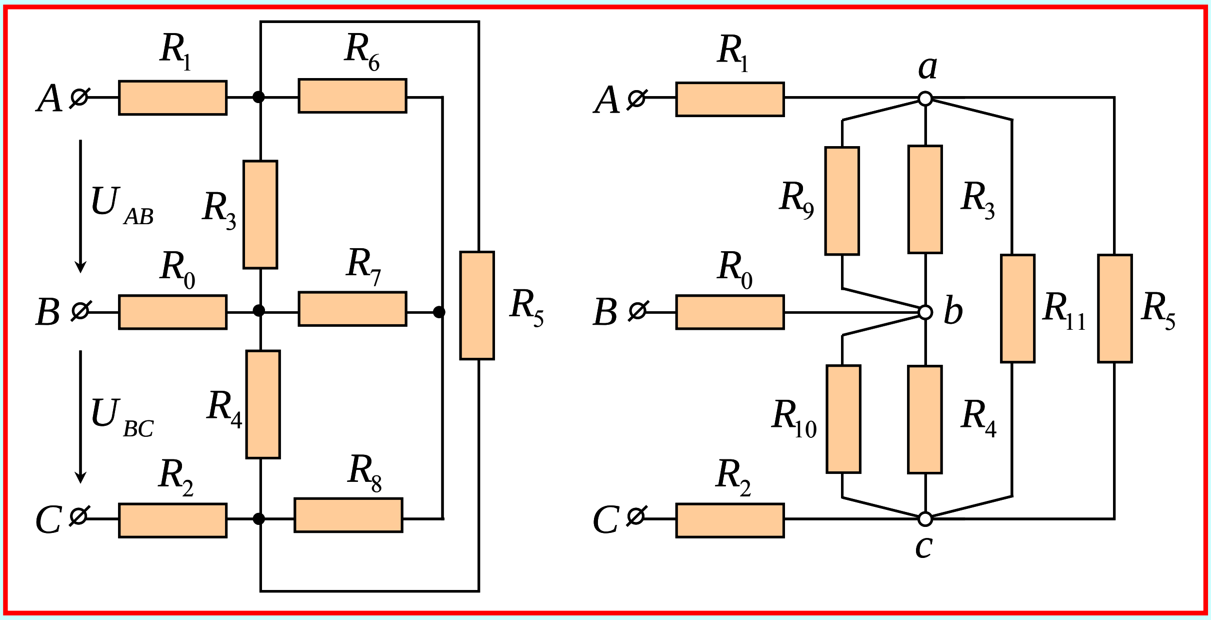


3. Vypočtěte proudy I_0, I_1 a I_2 ve větvích obvodu (obr.a), jestliže $U_{AB} = U_{BC} = 220\ \text{V}$, $R_0 = 0{,}5\ \Omega$, $R_1 = R_2 = R_7 = 1\ \Omega$, $R_3 = R_4 = 4\ \Omega$, $R_5 = 8\ \Omega$ a $R_6 = R_8 = 2\ \Omega$.

Řešení:

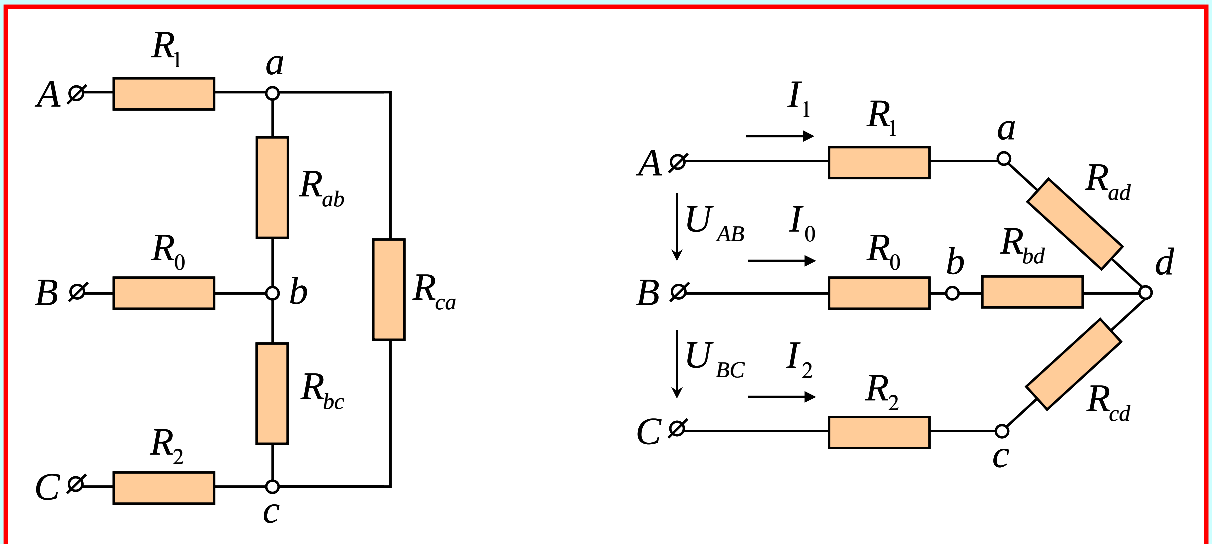
Uvedené zapojení elektrických odporů si můžeme zjednodušit tím, že provedeme transfiguraci hvězdy R_6- R_7- R_8 na trojúhelník R_9- R_{10}- R_{11} (**obr.b**), tj.

$$R_9 = R_6 + R_7 + \frac{R_6 R_7}{R_8} = 4\ \Omega, \quad R_{10} = R_7 + R_8 + \frac{R_7 R_8}{R_6} = 4\ \Omega, \quad R_{11} = R_6 + R_8 + \frac{R_6 R_8}{R_7} = 8\ \Omega.$$



Dále si schéma zjednodušíme sloučením paralelních větví (obr.c), platí

$$\frac{1}{R_{ab}} = \frac{1}{R_9} + \frac{1}{R_3}, \qquad \frac{1}{R_{bc}} = \frac{1}{R_{10}} + \frac{1}{R_4}, \qquad \frac{1}{R_{ac}} = \frac{1}{R_{11}} + \frac{1}{R_5}.$$



c) d)

Z předchozích vztahů vypočteme $R_{ab} = R_{bc} = 2\,\Omega$ a $R_{ac} = 4\,\Omega$. Nyní provedeme transfiguraci trojúhelníka *a*-*b*-*c* na hvězdu (obr.d), tj. platí

$$R_{ad} = \frac{R_{ab}R_{ac}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ac}} = 1\,\Omega\,, \quad R_{bd} = \frac{R_{ab}R_{bc}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ac}} = 0{,}5\,\Omega\,, \quad R_{cd} = \frac{R_{ac}R_{bc}}{R_{ab} + R_{bc} + R_{ac}} = 1\,\Omega\,.$$

Podle **obr.d** již nyní jednoduše vypočteme odpory jednotlivých větví *A*-*d, B*-*d, C*-*d* jako

$$R_{Ad} = R_1 + R_{ad} = 2\,\Omega\,, \quad R_{Bd} = R_0 + R_{bd} = 1\,\Omega\,, \quad R_{Cd} = R_2 + R_{cd} = 2\,\Omega\,.$$

Podle prvního Kirchhoffova zákona pro uzel *d* můžeme psát $I_0 + I_1 + I_2 = 0$. Podle druhého Kirchhoffova zákona pro uzavřené obvody *A*-*d*-*B*-*A* a *B*-*d*-*C*-*B* platí

$$U_{AB} + I_0 R_{Bd} - I_1 R_{Ad} = 0\,, \quad U_{BC} + I_2 R_{Cd} - I_0 R_{Bd} = 0\,.$$

Řešením předchozích lineárních rovnic získáme pro velikosti proudů

$$I_0 = 0\ \mathrm{A}\,, \qquad I_1 = 110\ \mathrm{A} \qquad \text{a} \qquad I_2 = -110\ \mathrm{A}\,.$$

Záporné znaménko u proudu I_2 signalizuje to, že proud skutečně protéká právě opačným směrem nežli jsme si zvolili při výpočtu.

4. Elektrický spirálový vařič o výkonu $P = 1\,\mathrm{kW}$ je zapojen na síťové napětí $U = 220\,\mathrm{V}$. Vypočtěte, jakou délku L má tenký odporový drát o průměru $d = 0{,}5\,\mathrm{mm}$, ze kterého je vytvořena odporová spirálu vařiče, jestliže při zahřátí je teplota drátu $t = 900^\circ\mathrm{C}$. Měrný odpor drátu při teplotě $t_0 = 0^\circ\mathrm{C}$ je $\rho_0 = 1\,\mu\Omega/\mathrm{m}$ a součinitel teplotní závislosti odporu $\alpha = 0{,}4\cdot 10^{-3}\,\mathrm{K}^{-1}$. Určete dobu τ, za kterou se začne vařit $m = 1\,\mathrm{kg}$ vody o počáteční teplotě $t_0 = 20^\circ\,\mathrm{C}$, jestliže účinnost vařiče $\eta = 70\,\%$. Měrná tepelná kapacita vody $c = 4186\,\mathrm{Jkg^{-1}K^{-1}}$.

Řešení:

Pro odpor spirály vařiče platí

$$R = \frac{U^2}{P},$$

$$R = \rho\frac{L}{S} = \rho_0\left[1+\alpha(t-t_0)\right]\frac{L}{S},$$

$$S = \pi\frac{d^2}{4}.$$

Vyjádříme-li z předchozích výrazů délku *L*, potom dostáváme

$$L = \frac{U^2 S}{P\rho} = \frac{U^2\pi d^2}{4P\rho_0\left[1+\alpha(t-t_0)\right]} = 6{,}99\ \mathrm{m}. \qquad R = \rho_0\left[1+\alpha(t-t_0)\right]\frac{L}{S} \doteq 48{,}4\,\Omega.$$

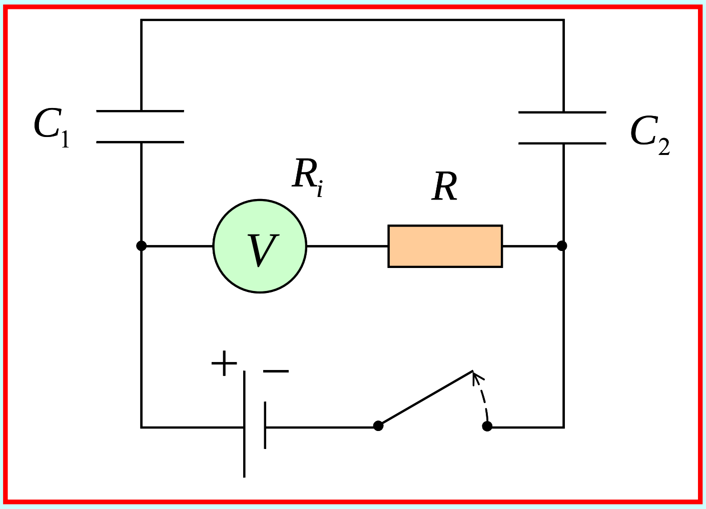
Pro příkon elektrického vařiče platí $P = UI = U^2/R$. Tepelná energie potřebná na ohřátí daného množství vody je $Q = mc\Delta t$, kde $\Delta t = 100^\circ\mathrm{C}\text{-}20^\circ\mathrm{C} = 80^\circ\mathrm{C}$. Účinnost vařiče je vyjádřena jako poměr získaného tepla na ohřátí vody k dodané elektrické energii za dobu ohřívání, tj.

$$\eta = \frac{Q}{P\tau} \qquad \Rightarrow \qquad \tau = \frac{Q}{\eta P} = \frac{mc\Delta t}{\eta U^2}R \doteq 478\ \mathrm{s} = 7\ \mathrm{min}\ 58\ \mathrm{s}.$$

5. Dva kondenzátory jsou spojené v elektrickém obvodu do série s odporem $R = 15\ \mathrm{k\Omega}$. Elektrický obvod zapojíme na zdroj elektromotorického napětí U_0 a nabijeme kondenzátory. Poté přerušíme napájení a za $\tau = 1\ \mathrm{s}$ po odpojení od zdroje poklesne napětí, které měříme v obvodu voltmetrem, na třetinu, tj. $U_1 = U_0/3$. Určete kapacitu kondenzátoru C_1, jestliže kapacita druhého kondenzátoru $C_2 = 100\ \mathrm{\mu F}$ a vnitřní odpor voltmetru $R_i = 500\ \Omega$.

Řešení:

Sériové zapojení kondenzátorů o kapacitě C je nabito nábojem Q_0 na napětí U_0 ($Q_0 = CU_0$).



Sériovým zapojením odporů R a R_i ($R_c = R + R_i$) po rozpojení obvodu bude protékat elektrický proud

$$I = \frac{U}{R_c} = \frac{Q}{R_c C},$$

kde Q je okamžitá hodnota náboje na kondenzátorech. Za dobu $\mathrm{d}t$ se zmenší náboj o hodnotu $-\mathrm{d}Q = I\,\mathrm{d}t$. Dosazením do předchozí rovnice dostáváme diferenciální rovnici pro časovou závislost náboje na kondenzátorech v obvodu, tj.

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = -\frac{Q}{R_c C} \qquad \Rightarrow \qquad \int_{Q_0}^{Q} \frac{\mathrm{d}Q}{Q} = \int_0^{\tau} \frac{\mathrm{d}t}{R_c C} \qquad \Rightarrow \qquad Q = Q_0 e^{-\frac{\tau}{R_c C}}.$$

Pro průběh napětí v obvodu tedy získáme

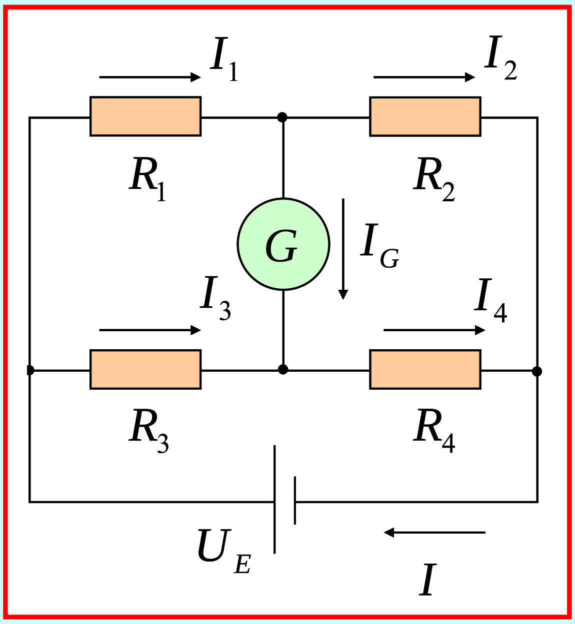
$$U = \frac{Q}{C} = U_0 e^{-\frac{\tau}{R_c C}}.$$

Nyní určíme kapacitu C sériového zapojení kondenzátorů C_1 a C_2, jelikož napětí v obvodu pokleslo za čas τ na $U = U_0/3$. Vypočteme

$$\frac{1}{C} = \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2} = -\frac{R_c}{\tau}\ln\frac{U}{U_0} = \frac{R_c}{\tau}\ln 3 \quad \Rightarrow \quad C_1 = \frac{C_2 \tau}{C_2 (R_i + R)\ln 3 - \tau} = 142{,}3\ \mathrm{\mu F}.$$

6. Na obrázku je znázorněn elektrický obvod (elektromotorické napětí $U_E = 2\ \mathrm{V}$, odpory $R_1 = 60\ \Omega$, $R_2 = 40\ \Omega$, $R_3 = R_4 = 20\ \Omega$, $R_G = 100\ \Omega$). Vypočtěte proud I_G, který protéká galvanometrem G.

Řešení:
Napíšeme-li si pro každý uzel a uzavřený obvod I. a II. Kirchhoffův zákon, potom obdržíme



$I = I_1 + I_3$, $\quad I = I_2 + I_4$,

$I_1 = I_2 + I_G$, $\quad I_4 = I_3 + I_G$,

$I_1R_1 + I_2R_2 = U_E$,

$I_3R_3 + I_4R_4 = U_E$,

$I_1R_1 + I_GR_G + I_4R_4 = U_E$.

Úpravou předchozích rovnic získáme soustavu tří lineárních rovnic

$I_1R_1 + (I_1 - I_G)R_2 = U_E$,

$(I_4 - I_G)R_3 + I_4R_4 = U_E$,

$I_1R_1 + I_GR_G + I_4R_4 = U_E$,

jejímž řešením vypočteme $I_G = -1{,}49 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{A}$. Záporné znaménko u výsledného proudu značí, že směr proudu je opačný oproti směru, který jsme si zvolili při popisu daného obvodu.

7. Určete přibližně, jaká vrstvička stříbra se vyloučí při elektrolytickém postříbření na elektrodě o ploše $S = 100\ \mathrm{cm}^2$, jestliže elektrolytem protéká proud $I = 5\ \mathrm{A}$ po dobu $\tau = 10\ \mathrm{hod}$. Hustota stříbra $\rho = 10500\ \mathrm{kg/m}^3$ a atomová relativní hmotnost stříbra $A_r \doteq 107{,}9$.

Řešení: Podle Faradayova zákona pro elektrolýzu platí pro hmotnost vyloučeného množství kovu na elektrodě vztah

$$m = AIt = \frac{M_m}{\nu F} It = \frac{A_r \cdot 10^{-3}}{\nu F} It = 0{,}201\ \mathrm{kg},$$

kde A je elektrochemický ekvivalent a M_m molární hmotnost vylučované látky, $\nu = 1$ je valence vylučovaného prvku a $F = 9{,}6485 \cdot 10^4\ \mathrm{C/mol}$ je Faradayova konstanta. Pro přibližnou tloušťku vrstvy na elektrodě potom vypočteme $d = m/(S\rho) \doteq 1{,}92\ \mathrm{mm}$.