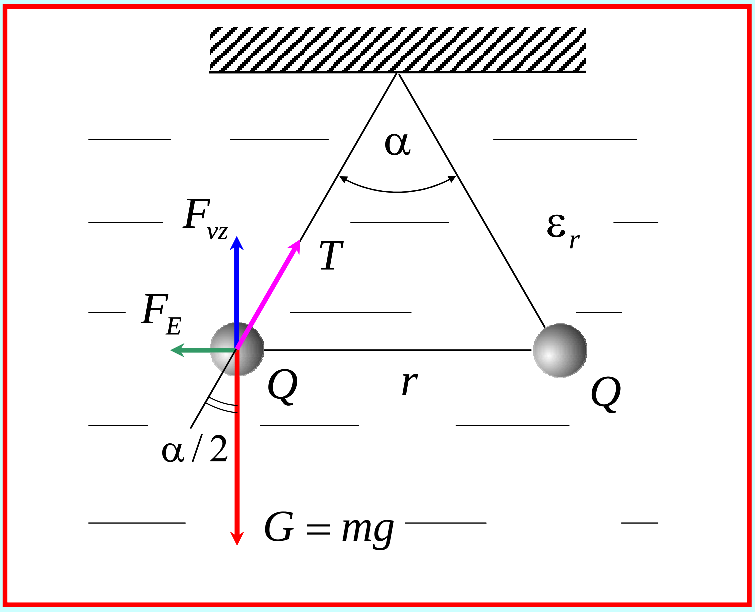
Elektrostatické pole

1. Dvě stejné malé kuličky o hmotnosti *m*, jež jsou souhlasně nabité nábojem *Q*, jsou pověšeny na tenkých nitích stejné délky v kapalině s hustotou $\rho_k = 0{,}8\ \mathrm{g/cm^3}$. Vypočtěte, jakou hustotu ρ musí mít materiál kuliček, aby zavěšené kuličky svíraly v kapalině a ve vakuu stejný úhel α. Relativní permitivita kapaliny $\varepsilon_r = 2$.

Řešení:
Podle obrázku můžeme vyjádřit vzájemný geometrický vztah mezi silami působícími na kuličky, tj. tíhou *G*, vztlakovou silou F_{vz}, elektrostatickou silou F_E v kapalině a elektrostatickou silou F_{E0} ve vakuu. Dostaneme

$$F_{E0} = G\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = mg\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2},$$

$$\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = F_E/(mg - F_{vz}).$$



Pro jednotlivé síly též platí

$$F_E = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2},$$

$$F_{vz} = \rho_k V g,$$

$$G = mg = \rho V g,$$

$$F_{E0} = \frac{Q^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

Dosazením předchozích vztahů do rovnosti plynoucí z geometrického uspořádání

$$\frac{F}{mg} = \frac{F_E}{mg - F_{vz}}$$

získáme pro hustotu ρ kuliček

$$\rho = \frac{\varepsilon_r \rho_k}{\varepsilon_r - 1} = 1{,}6\ \mathrm{g/cm^3}.$$

2. Plná homogenní koule o poloměru $R = 10$ cm je rovnoměrně nabitá s objemovou hustotou náboje $\rho = 15 \cdot 10^{-9}\,\mathrm{C/m^3}$. Určete intenzitu $E(r)$ elektrostatického pole koule, jestliže relativní permitivita materiálu koule $\varepsilon_r = 5$.

Řešení: Pro elektrickou indukci D pole (Gaussova věta) platí

$$\oint_S \mathbf{D}\,\mathrm{d}\mathbf{S} = \int_V \rho\,\mathrm{d}V\,, \qquad \mathbf{D} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \mathbf{E}\,.$$

Použitím předchozí věty získáme pro intenzitu elektrostatického pole koule

$r \in (0, R)$

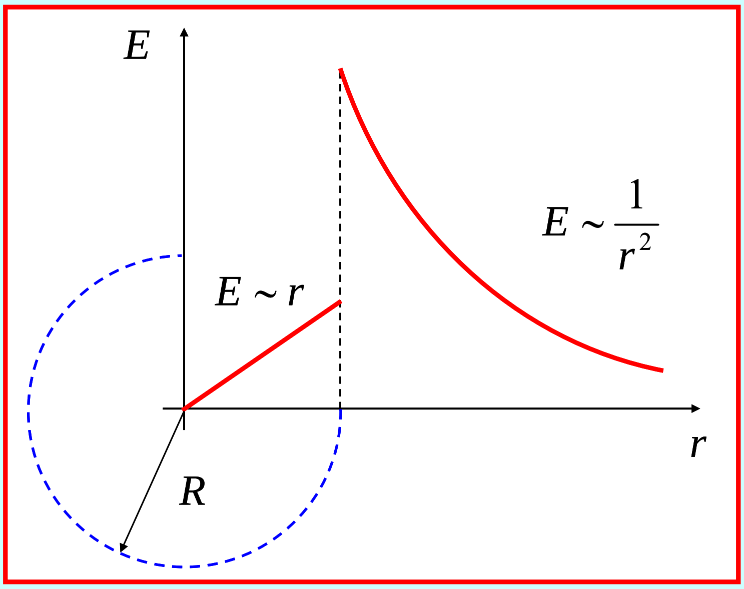
$$\Rightarrow \qquad D \cdot 4\pi r^2 = \rho \frac{4}{3}\pi r^3\,,$$

$$E = \frac{D}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0 \varepsilon_r}\,,$$

$r > R$

$$\Rightarrow \qquad D \cdot 4\pi r^2 = \rho \frac{4}{3}\pi R^3\,,$$

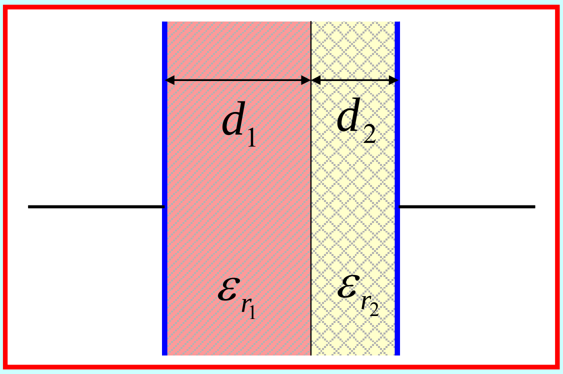
$$E = \frac{D}{\varepsilon_0} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}\,.$$



3. Mezi deskami deskového kondenzátoru je slídová destička ($\varepsilon_{r1} = 7$) tloušťky $d_1 = 1$ mm a vrstva parafínu ($\varepsilon_{r2} = 2$) tloušťky $d_2 = 0{,}5$ mm. Určete intenzitu E elektrostatického pole v obou prostředích a indukci D elektrostatického pole mezi deskami kondenzátoru, jestliže mezi deskami je napětí $U = 500$ V.

Řešení:

Pro indukci a intenzitu pole mezi deskami kondenzátoru platí



$$D = \varepsilon_0 \varepsilon_{r1} E_1 = \varepsilon_0 \varepsilon_{r2} E_2,$$

$$U = E_1 d_1 + E_2 d_2.$$

Sloučením předchozích vztahů dostáváme pro intenzitu elektrostatického pole v prostředích mezi deskami kondenzátoru a pro elektrickou indukci

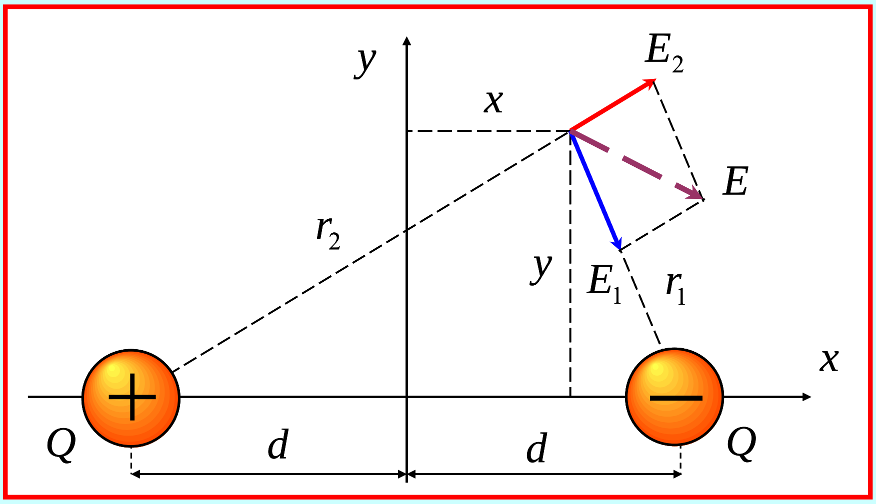
$$E_1 = \frac{\varepsilon_{r2} U}{\varepsilon_{r2} d_1 + \varepsilon_{r1} d_2} = 182 \text{ kV/m},$$

$$E_2 = \frac{\varepsilon_{r1} U}{\varepsilon_{r2} d_1 + \varepsilon_{r1} d_2} = 637 \text{ kV/m}, \qquad D = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_{r1} \varepsilon_{r2} U}{\varepsilon_{r2} d_1 + \varepsilon_{r1} d_2} = 11{,}3 \cdot 10^{-6}\ \text{C/m}^2.$$

.

4. Vypočtěte obecně intenzitu E a potenciál φ elektrostatického pole dvou nábojů Q (souhlasných resp. nesouhlasných), které se nacházejí ve vzájemné vzdálenosti $2d$. Určete velikost intenzity E_1 resp. E_2 uprostřed jejich přímé spojnice, jestliže velikost nábojů $Q = 1\ \mathrm{C}$, vzdálenost $d = 1\ \mathrm{m}$ a relativní permitivita prostředí $\varepsilon_r = 3$.

Řešení: Určeme si nejdříve potenciál φ elektrostatického pole v nějakém bodě (x,y), přičemž počátek souřadné soustavy jsme si zvolili uprostřed přímé spojnice obou nábojů, tj. náboje mají souřadnice $[-d,0]$ a $[0,d]$. Na obrázcích jsou znázorněny siločáry elektrostatického pole dvou souhlasných a nesouhlasných nábojů.



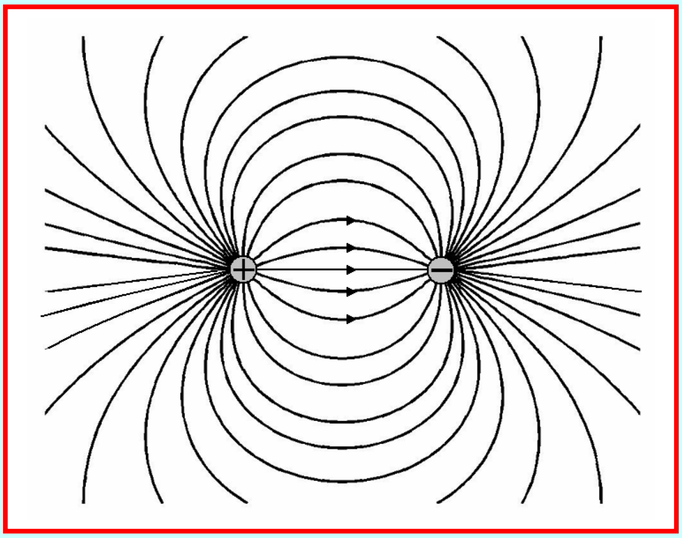
Pro potenciál φ v bodě (x,y) platí

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\left(\frac{Q}{r_1} \pm \frac{Q}{r_2}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\left(\frac{1}{\sqrt{(x-d)^2+y^2}} \pm \frac{1}{\sqrt{(x+d)^2+y^2}}\right).$$

Intenzitu vypočteme podle vztahu $\mathbf{E} = (E_x, E_y) = -\mathrm{grad}\,\varphi$, tj. pro jednotlivé složky platí

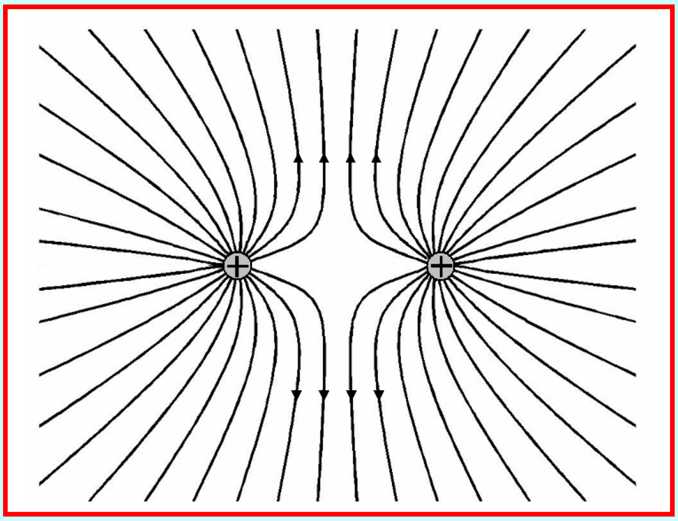
$$E_x = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\left(\frac{(x-d)}{[(x-d)^2+y^2]^{3/2}} \pm \frac{(x+d)}{[(x+d)^2+y^2]^{3/2}}\right),$$

$$E_y = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r}\left(\frac{y}{[(x-d)^2+y^2]^{3/2}} \pm \frac{y}{[(x+d)^2+y^2]^{3/2}}\right).$$



Znaménko + v předchozích výrazech znamená souhlasné náboje, znaménko – poté náboje nesouhlasného znaménka. Směrnice tečny k siločárám v daném bodě je rovna $\operatorname{tg}\varphi = E_y / E_x$.

Dosazením za $x = 0$, $y = 0$ dostaneme pro intenzitu $E_1 = 0$ V/m resp. $E_2 = 6 \cdot 10^9$ V/m.



5. Částice o hmotnosti m, nabitá nábojem Q, se pohybuje rychlostí v_0. Tato částice vletí vodorovně do homogenního elektrického pole, vytvořeného dvěma rovnoběžnými deskami kondenzátoru. Mezi deskami je potenciální rozdíl U a vzdálenost desek je d. Vypočtěte, v jaké vzdálenosti od osy x dopadne tato částice na stínítko S vzdálené L od konce desek kondenzátoru. Dráha, kterou proletí nabitá částice mezi deskami kondenzátoru je rovna l.

Řešení:

Na nabitou částici, pohybující se mezi deskami kondenzátoru, působí ve svislém směru tíhová síla $G = mg$ a elektrostatická síla $F_e = QE = QU/d$. Pohybovou rovnici částice $m\mathbf{a} = \mathbf{G} + \mathbf{F}_e$ můžeme poté zapsat jako dvě skalární rovnice

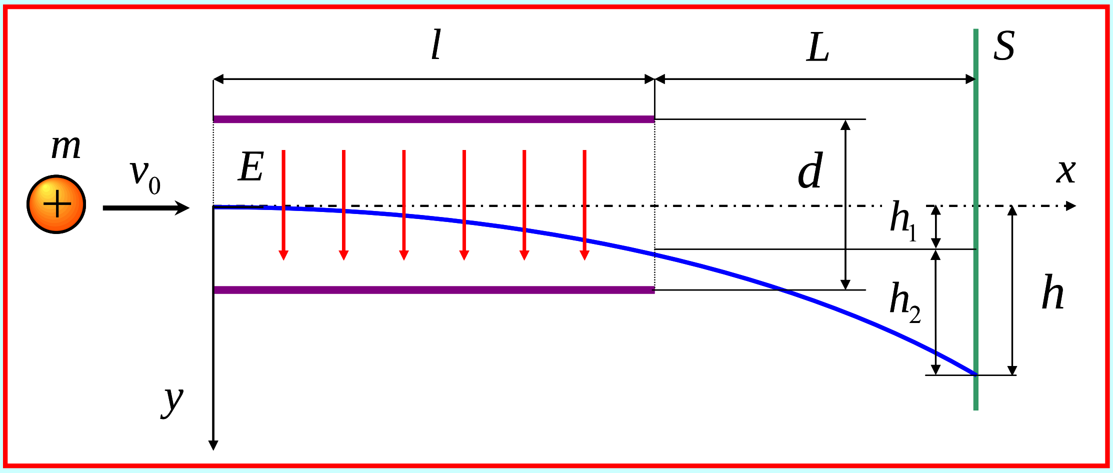
$$ma_x = m\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} = 0\,,$$

$$ma_y = m\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = mg \pm \frac{QU}{d}\,,$$

ze kterých integrací plyne

$$v_x = v_0\,, \qquad x = v_0 t\,,$$

$$v_y = \left(g \pm \frac{QU}{md}\right)t\,, \qquad y = \left(g \pm \frac{QU}{md}\right)\frac{t^2}{2}\,.$$



Čas, za který částice opustí prostor mezi deskami kondenzátoru, vypočteme dosazením $x = l$ do rovnice pro dráhu x, platí $t_1 = l/v_0$. Dosazením do vztahů pro rychlost a zrychlení ve směru y získáme

$$v_{y1} = \left(g \pm \frac{QU}{md}\right)\frac{l}{v_0}\,, \quad h_1 = \left(g \pm \frac{QU}{md}\right)\frac{l^2}{2v_0^2}\,.$$

Mimo elektrické pole se bude částice pohybovat pouze působením své tíhy, tj. bude platit

$$v'_y = v_{y1} + g\,t\,, \qquad y' = v_{y1}t + \frac{1}{2}gt^2\ .$$

Na stínítko částice dopadne po době $t_2 = L / v_0$. Dosadíme-li tuto dobu do předchozích vztahů ($t = t_2$), potom obdržíme

$$h_2 = \left(g \pm \frac{QU}{md}\right)\frac{lL}{v_0^2} + \frac{gL^2}{2v_0^2}\ .$$

Celkové odchýlení h částice ve svislém směru je tedy

$$h = h_1 + h_2 = \left(g \pm \frac{QU}{md}\right)\left(\frac{l^2}{2v_0^2} + \frac{lL}{v_0^2}\right) + \frac{gL^2}{2v_0^2}\ .$$