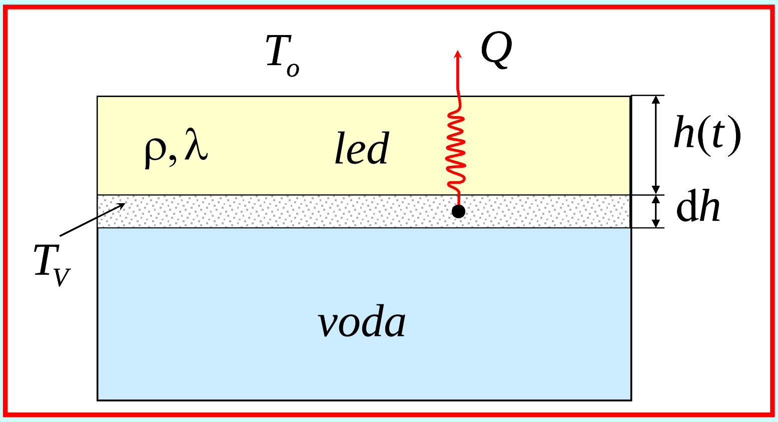
Přenos tepla a látky

10. Určete, za jaký čas τ se utvoří na rybníku vrstva ledu tloušťky $h = 10\ \mathrm{cm}$, jestliže led přirůstá na styku s vodou při teplotě $t_v = 0^\circ\mathrm{C}$. Měrné skupenské teplo tání ledu $l = 333{,}2\ \mathrm{kJ/kg}$, koeficient tepelné vodivosti ledu $\lambda = 2{,}2\ \mathrm{Wm^{-1}K^{-1}}$ a hustota ledu $\rho = 917\ \mathrm{kg/m^3}$. Teplotu okolního vzduchu uvažujte konstantní $t_o = -10^\circ\mathrm{C}$.

Řešení:

Při tuhnutí elementární vrstvičky vody o tloušťce dh na rozhraní vody a ledu se uvolňuje tepelná energie $\mathrm{d}Q = l\mathrm{d}m = l\rho\mathrm{d}V = l\rho S\mathrm{d}h$, která musí být odvedena skrz vrstvu ledu. Pro tepelný tok procházející vrstvou ledu o ploše S za jednotku času můžeme psát

$$j = \frac{\mathrm{d}Q}{S\mathrm{d}\tau} = -\lambda\,\mathrm{grad}\,T = \lambda\frac{\Delta T}{h} = \lambda\frac{t_V - t_o}{h}.$$



Dosazením za tepelnou energii dQ do předchozí rovnice získáme diferenciální rovnici

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}\tau} = \lambda\frac{\Delta T}{l\rho h},$$

jejímž vyřešením metodou separace proměnných získáme pro hledanou dobu

$$\tau\int_0^h h\mathrm{d}h = \lambda\frac{\Delta T}{l\rho}\int_0^\tau \mathrm{d}\tau \quad \Rightarrow \quad \tau = \frac{l\rho h^2}{2\lambda\Delta T} \doteq 20\ \text{hod.}$$

11. Určete tepelnou ztrátu Q za dobu $\tau = 24$ hod. zdi o tloušťce $d_0 = 360$ mm s vnitřní resp. vnější omítkou tl. $d_1 = 10$ mm resp. tl. $d_2 = 25$ mm. Zeď má plochu $S = 10\ \mathrm{m}^2$, na vnitřní resp. vnější straně zdi jsou stálé teploty $t_i = 25^\circ\mathrm{C}$ resp. $t_e = -5^\circ\mathrm{C}$. Koeficienty přestupu tepla jsou na vnitřní resp. vnější straně zdi $\alpha_i = 5\ \mathrm{Wm^{-2}K^{-1}}$ resp. $\alpha_e = 17\ \mathrm{Wm^{-2}K^{-1}}$, součinitel tepelné vodivosti zdiva $\lambda_0 = 0{,}25\ \mathrm{Wm^{-1}K^{-1}}$, pro vnitřní omítku $\lambda_1 = 0{,}11\ \mathrm{Wm^{-1}K^{-1}}$ a pro vnější omítku $\lambda_2 = 0{,}13\ \mathrm{Wm^{-1}K^{-1}}$. Určete též průběh teploty v jednotlivých vrstvách konstrukce a měrný tepelný odpor R stěny.

Řešení:

Pokud se teploty nemění a vlastnosti materiálu v rovině stěny jsou stejné, potom můžeme tuto úlohu řešit jako jednorozměrné stacionární vedení tepla stěnou. Hustota tepelného toku j ve svislé rovině konstrukce (tj. množství tepla, které projde jednotkovou plochou za jednotku času) je vzhledem k neměnnosti okolních podmínek konstantní ($j = \mathrm{konst.}$) a je dána pro vedení tepla Fourierovým zákonem

$$j = -\lambda \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x} = \lambda \frac{\Delta T}{d}$$

resp. pro přestup tepla mezi vzduchem a stěnou vztahem $j = \alpha \Delta T$, kde d je tloušťka vrstvy konstrukce stěny a ΔT je kladný teplotní rozdíl na rozhraní jednotlivých vrstev konstrukce. Jestliže si tedy nyní vyjádříme jednotlivé teplotní rozdíly na všech rozhraních konstrukce stěny, potom dostaneme

$$t_i - t_1 = \frac{j}{\alpha_i},$$

$$t_1 - t_2 = \frac{d_1}{\lambda_1} j,$$

$$t_2 - t_3 = \frac{d_0}{\lambda_0} j,$$

$$t_3 - t_4 = \frac{d_2}{\lambda_2} j,$$

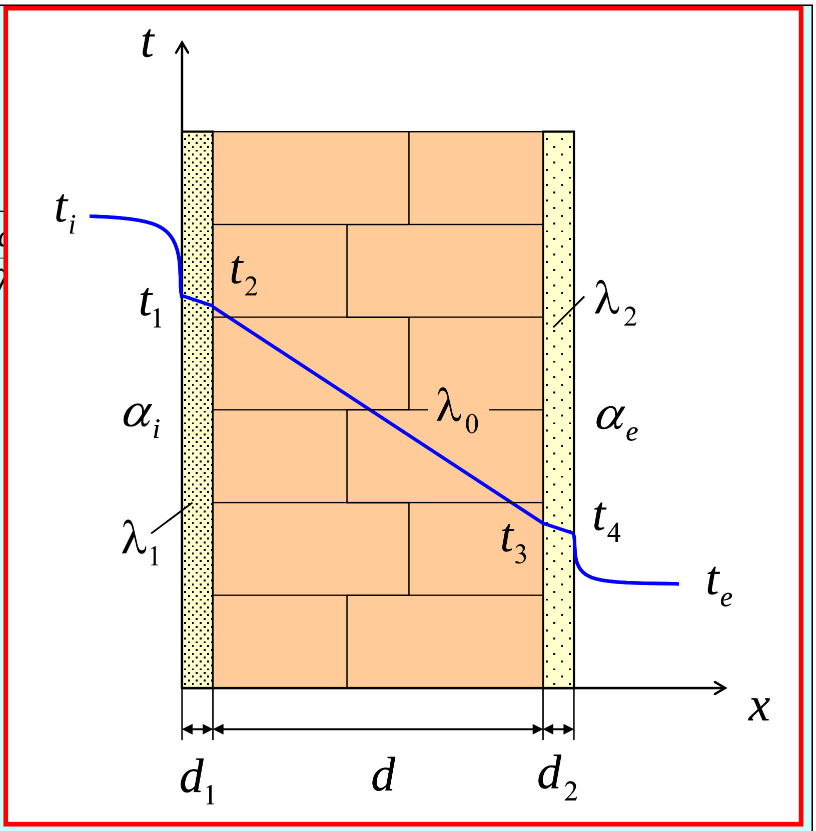
$$t_4 - t_e = \frac{j}{\alpha_e}.$$

Sečtením všech předchozích rovnic dostáváme pro hustotu tepelného toku

$$j = \frac{Q}{S\tau} = \frac{(t_i - t_e)}{R} = \frac{(t_i \ldots}{\left(\frac{1}{\alpha_i} + \frac{d_1}{\lambda_1} + \ldots\right.}$$

,

kde $R = 1{,}98\ \mathrm{m^2KW^{-1}}$ je měrný tepelný odpor stěny. Tepelnou ztrátu Q za dobu τ vypočteme z předchozího vztahu $Q = jS\tau \doteq 13{,}1\ \mathrm{MJ}$. Teploty na jednotlivých rozhraních stěny získáme jednoduchým dosazením do odvozených vztahů pro teplotní rozdíly, tj.



$t_1 = 21{,}97^\circ\mathrm{C}$, $t_2 = 20{,}59^\circ\mathrm{C}$, $t_3 = -1{,}23^\circ\mathrm{C}$, $t_4 = -1{,}42^\circ\mathrm{C}$.

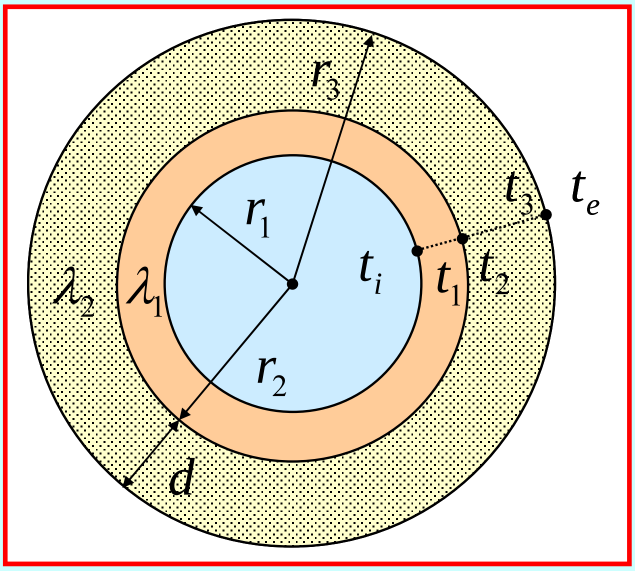
12. Ocelovým potrubím o délce $l = 100\ \mathrm{m}$, vnitřním poloměru $r_1 = 50\ \mathrm{mm}$, vnějším poloměru $r_2 = 60\ \mathrm{mm}$, které je obaleno tepelnou izolací tloušťky $d = 70\ \mathrm{mm}$, protéká olej o hmotnostním průtoku $Q_m = 5000\ \mathrm{kg/hod.}$, přičemž průměrná teplota oleje na vstupu do potrubí $t_A = 95^\circ\mathrm{C}$ a teplota okolního prostředí $t_e = 20^\circ\mathrm{C}$. Součinitel přestupu tepla na vnitřní straně potrubí $\alpha_i = 150\ \mathrm{Wm^{-2}K^{-1}}$ (mezi kapalinou a stěnou potrubí), na vnější straně potrubí $\alpha_e = 12\ \mathrm{Wm^{-2}K^{-1}}$, součinitel tepelné vodivosti oceli $\lambda_1 = 51\ \mathrm{Wm^{-1}K^{-1}}$, materiálu izolace $\lambda_2 = 0{,}20\ \mathrm{Wm^{-1}K^{-1}}$ a měrná tepelná kapacita oleje $c = 1450\ \mathrm{Jkg^{-1}K^{-1}}$. Určete tepelnou ztrátu Q_Z potrubí za dobu $\tau = 24\ \mathrm{hod.}$, průměrnou teplotu na povrchu potrubí a průměrnou teplotu oleje t_B na konci potrubí. Dále vypočtěte, jak se změní tepelná ztráta, jestliže potrubí nebude izolováno (součinitel přestupu tepla na vnější straně potrubí se nezmění).

Řešení: Uvažujme tedy, že uvnitř potrubí je teplota kapaliny t_i, potom množství tepla Q, které projde za určitou dobu τ povrchem jakékoliv válcové plochy o daném poloměru $r \in \langle r_1, r_3 \rangle$ ($r_3 = r_2 + d$) a délce L bude konstantní, tj. platí pro vedení tepla (Fourierův zákon $j = -\lambda\, \mathrm{grad}\, t$) resp. přestup tepla ($j = \alpha \Delta t$)

$$Q = jS\tau = 2\pi r L\tau j = -2\pi r L\tau\lambda \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}r},$$

resp.

$$Q = jS\tau = 2\pi r L\tau\alpha\Delta t\,.$$



Integrací diferenciální rovnice pro stacionární vedení tepla v jedné vrstvě ($r \in \langle r_k, r_{k+1} \rangle$) o tepelné vodivosti λ_k tedy dostaneme

$$Q = 2\pi L\tau\lambda_k \frac{\Delta t}{\ln \dfrac{r_{k+1}}{r_k}}\,.$$

Vyjádříme-li nyní teplotní rozdíly na rozhraní jednotlivých vrstev, potom obdržíme

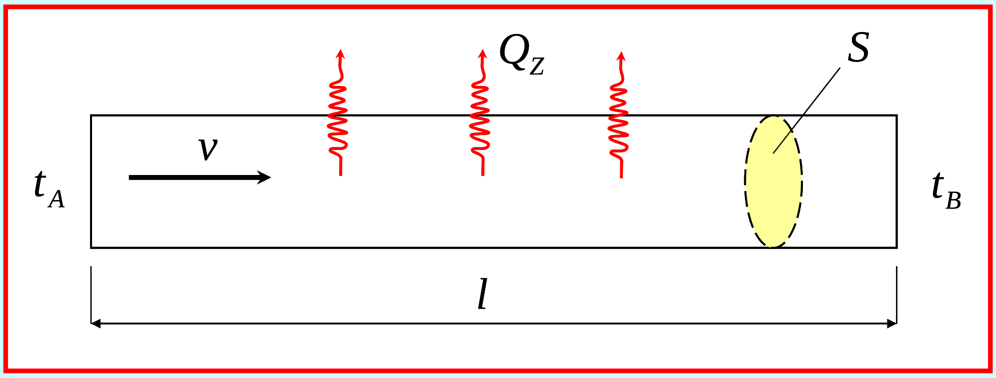
$$t_i - t_1 = \frac{Q}{2\pi L\tau r_1\alpha_i}, \quad t_1 - t_2 = \frac{Q}{2\pi L\tau\lambda_1}\ln\frac{r_2}{r_1}, \quad t_2 - t_3 = \frac{Q}{2\pi L\tau\lambda_2}\ln\frac{r_3}{r_2}, \quad t_3 - t_e = \frac{Q}{2\pi L\tau r_3\alpha_e}\,.$$

Sečtením těchto rovnic obdržíme

$$t_i - t_e = \frac{Q}{L\tau}\left(\frac{1}{2\pi r_1\alpha_i} + \frac{1}{2\pi\lambda_1}\ln\frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{2\pi\lambda_1}\ln\frac{r_3}{r_2} + \frac{1}{2\pi r_3\alpha_e}\right) = \frac{Q}{L\tau}R = q_L R\,,$$

kde q_L je délková hustota tepelného toku a R je měrný tepelný odpor jednotkové délky potrubí. Chceme-li nyní určit, jak se přibližně bude měnit teplota kapaliny po délce potrubí, tak vyjádříme teplo, které se odvede délkou dx potrubí za jednotku času, a porovnáme ho s úbytkem tepla daného množství kapaliny mezi průřezy x a dx při poklesu teploty o dt, tj.

$$\frac{t-t_e}{R}\,\mathrm{d}x = -Q_m c\,\mathrm{d}t\,.$$



Z předchozího vztahu integrací s použitím počátečních podmínek získáme

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}x}{Q_m c R} = \int_{t_A}^{t_i} \frac{\mathrm{d}t}{t_e - t} \qquad \Rightarrow \qquad t_i(x) = t_e + (t_A - t_e)e^{-\frac{x}{Q_m c R}}\,.$$

Pro teplotu t_B na konci potrubí ($x = l$) tedy dostaneme $t_B \doteq 70{,}1^\circ\mathrm{C}$. Povrchovou teplotu t_3 izolace potrubí vypočteme ze vztahu

$$t_3(x) = \frac{Q}{2\pi L \tau r_3 \alpha_e} + t_e = \frac{t_i(x) - t_e}{2\pi r_3 \alpha_e R} + t_e\,,$$

a tedy průměrná teplota potrubí (průměr pro vstupní a výstupní průřez) $\bar{t}_3 \doteq 28{,}6^\circ\mathrm{C}$. Tepelnou ztrátu Q_Z potrubí vypočteme jednoduše integrací ze vztahu

$$Q_Z = \int_0^l \frac{\tau[t_i(x) - t_e]}{R}\,\mathrm{d}x = \tau(t_A - t_e)Q_m c\left[1 - e^{-\frac{l}{Q_m c R}}\right] \doteq 848\ \mathrm{MJ}\,.$$

Kdyby bylo potrubí neizolované, potom by tepelná ztráta za stejnou dobu byla

$$Q_{Z,n} = \tau(t_A - t_e)Q_m c\left[1 - e^{-\frac{l}{Q_m c R_n}}\right] \doteq 4{,}3\ \mathrm{GJ}\,, \quad \text{kde} \qquad R_n = \left(\frac{1}{2\pi r_1 \alpha_i} + \frac{1}{2\pi\lambda_1}\ln\frac{r_2}{r_1} + \frac{1}{2\pi r_3 \alpha_e}\right).$$