Chování ideálních a reálných plynů

6. Oxid uhličitý CO_2 o hmotnosti $m = 6{,}6\ \mathrm{kg}$ a tlaku $p = 0{,}1\ \mathrm{MPa}$ zaujímá objem $V = 3{,}75\ \mathrm{m}^3$. Určete teplotu plynu, jestliže se chová plyn a) ideálně resp. b) podle van der Waalsovy stavové rovnice s koeficienty $a = 0{,}361\ \mathrm{Nm^4mol^{-2}}$ a $b = 4{,}28 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{m^3mol^{-1}}$. Molární hmotnost plynu je $M = 44 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{kg/mol}$.

<u>Řešení</u>:

a) Při uvažování ideálního chování plynu vypočteme ze stavové rovnice

$$pV = \frac{m}{M}RT \quad \Rightarrow \qquad T_1 = \frac{MpV}{mR} = 301\ \mathrm{K}\,.$$

b) Použijeme-li van der Waalsovu stavovou rovnici pro chování plynu

$$\left(p + n^2\frac{a}{V^2}\right)\left(\frac{V}{n} - b\right) = RT_2\,, \qquad\qquad n = m/M\,,$$

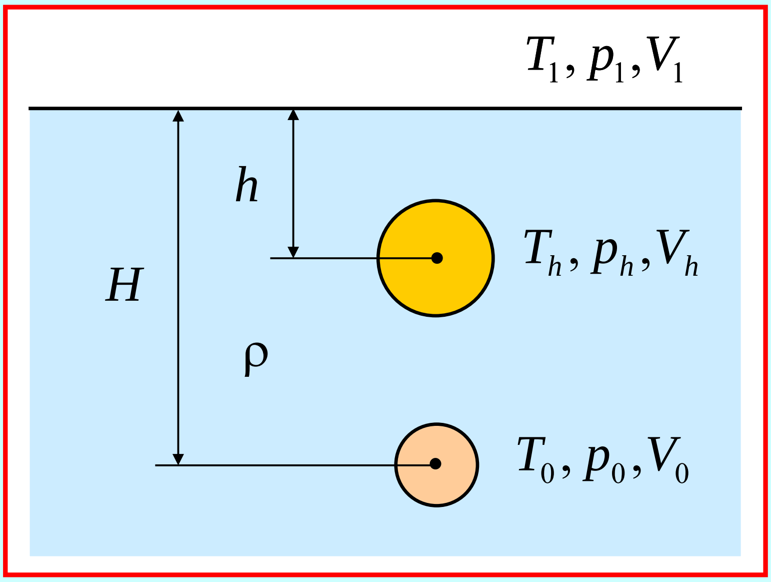
potom můžeme vypočítat teplotu plynu ze vztahu

$$T_2 = \frac{\left(p + \frac{m^2}{M^2}\frac{a}{V^2}\right)\left(V - \frac{m}{M}b\right)}{mR} = 302\ \mathrm{K}\,.$$

7. V hloubce $H = 30\,\mathrm{m}$ pod hladinou jezera máme malou vzduchovou bublinku o poloměru $r_0 = 5\ \mathrm{mm}$. Bublinka stoupá účinkem vztlakové síly pomalu k hladině. Určete jakou bude mít bublinka velikost v hloubce $h = 10\,\mathrm{m}$ pod hladinou, jestliže předpokládáme, že teplota vody lineárně roste s klesající hloubkou.V hloubce H je teplota vody $t_0 = 5^\circ$, na povrchu má voda teplotu $t_1 = 25^\circ$, hustota vody je $\rho = 1000\ \mathrm{kg/m^3}$ a barometrický tlak nad hladinou $p_1 = 10^5\,\mathrm{Pa}$. Zanedbejte absorpci molekul plynu do vody a vliv povrchového napětí.

Řešení:

Pro tlak $p(h)$ uvnitř bublinky a teplotu $T(h)$ v hloubce h platí



$$p(x) = (H - h)\rho g + p_1\,,$$

$$T(x) = T_0 + \frac{T_1 - T_0}{H} h\,.$$

Podle stavové rovnice ideálního plynu dále platí

$$\frac{p(h)V(h)}{T(h)} = \frac{p_0 V_0}{T_0} \quad \Rightarrow$$

$$V(h) = \frac{p_0 V_0}{T_0}\frac{T(h)}{p(h)} = \frac{p_0 V_0}{T_0}\frac{T_0 + \dfrac{T_1 - T_0}{H}h}{(H-h)\rho g + p_1}\,,$$

kde $V_0 = 4\pi r_0^3/3$, $p_0 = p_1 + \rho g H$. Pro poloměr bublinky v hloubce h potom vypočteme

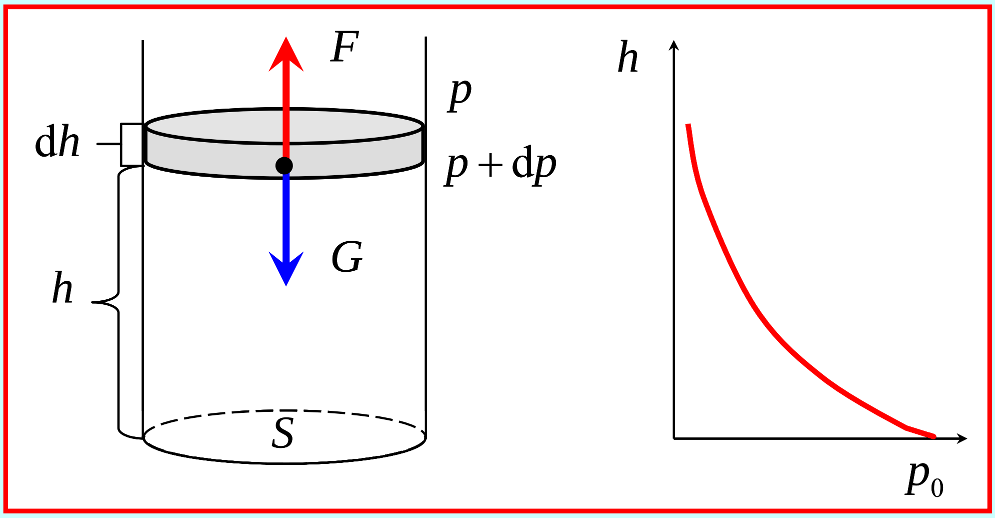
$$r(h) = \sqrt[3]{\frac{3V(h)}{4\pi}} = r_0 \sqrt[3]{\frac{H\rho g + p_1}{T_0}\frac{T_0 + \dfrac{T_1 - T_0}{H}h}{(H-h)\rho g + p_1}} \doteq 1{,}11 r_0 = 5{,}55\ \mathrm{mm}\,.$$

8. Určete, v jaké výšce h nad úrovní moře bude atmosférický tlak poloviční, jestliže předpokládáme, že se atmosféra chová polytropicky, tj. $pV^n = \text{konst.}$, $n \doteq 1{,}2$. V úrovni hladiny moře je tlak $p_0 = 10^5\,\text{Pa}$, teplota $t_0 = 30^\circ\text{C}$ a hustota vzduchu $\rho_0 = 1{,}3\,\text{kg/m}^3$. Dále určete, jaká bude v dané výšce teplota t.

Řešení: Zvolíme-li si elementární objem dV sloupce vzduchu o průřezu S ve výšce h, potom rozdíl tlakových sil dF působících na tuto vrstvičku musí být roven její tíze dG, tj. platí $\mathrm{d}F = \mathrm{d}G$, kde

$$\mathrm{d}F = pS - (p + \mathrm{d}p)S = -S\mathrm{d}p\,,$$

$$\mathrm{d}G = \rho g \mathrm{d}V = \rho g S \mathrm{d}h\,.$$



Pro změnu tlaku s výškou tedy dostaneme $\mathrm{d}p = -\rho g \mathrm{d}h$. Jelikož vzduch je stlačitelná tekutina, musíme uvážit při výpočtu změnu hustoty v závislosti na tlaku. Ze vztahu pro polytropický děj získáme

$$pV^n = p_0 V_0^n\,, \quad m = \rho V \qquad \Rightarrow \qquad \rho = \rho_0 \left(\frac{p}{p_0}\right)^{1/n}.$$

Dosazením do vztahu pro změnu tlaku a následnou integrací dostaneme

$$\mathrm{d}p = -\rho_0 g \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{1}{n}} \mathrm{d}h \quad \Rightarrow \quad \int_{p_0}^{p} p^{-\frac{1}{n}} \mathrm{d}p = -\frac{\rho_0 g}{(p_0)^{\frac{1}{n}}} \int_0^h \mathrm{d}h \quad \Rightarrow \quad p^{\frac{n-1}{n}} - p_0^{\frac{n-1}{n}} = -\frac{n-1}{n} \frac{\rho_0 g}{(p_0)^{\frac{1}{n}}} h\,.$$

Závislost tlaku na výšce lze tedy vyjádřit pomocí výrazu

$$p(h) = p_0\left(1-\frac{n-1}{n}\frac{\rho_0 g}{p_0}h\right)^{\frac{n}{n-1}}.$$

Pro hledanou výšku h, kde $p = p_0/2$ vypočteme z předchozích vztahů

$$h = -\frac{n}{n-1}\frac{(p_0)^{\frac{1}{n}}}{\rho_0 g}\left[p^{\frac{n-1}{n}} - p_0^{\frac{n-1}{n}}\right] = \frac{n}{n-1}\frac{p_0}{\rho_0 g}\left[1-\left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{n-1}{n}}\right] = \frac{6p_0}{\rho_0 g}\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{6}}\right] = 5133\ \text{m}.$$

Pro teplotu vzduchu v dané výšce dostaneme ze stavové rovnice a rovnice polytropy

$$\frac{p}{\rho T} = \frac{p_0}{\rho_0 T_0} \quad\Rightarrow\quad T = \frac{p}{\rho}\cdot\frac{\rho_0 T_0}{p_0} = \frac{pT_0}{p_0}\left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{1}{n}} = T_0\left(\frac{p_0}{p}\right)^{\frac{1-n}{n}} = T_0 2^{\frac{1-n}{n}} \doteq 270{,}1\ \text{K}.$$

9. Určete, zda komín o výšce h = 38 m a vnitřním průřezu u paty komína $S_1 = 1{,}5\ \mathrm{m}^2$ resp. u ústí komína $S_2 = 1{,}2\ \mathrm{m}^2$ bude mít dostatečný tah pro odvod spalin, jestliže celková tlaková ztráta v komíně při daných podmínkách je $\Delta p_z = 70\ \mathrm{Pa}$, objemový průtok spalin $Q_v = 20000\ \mathrm{m}^3/\mathrm{h}$., teplota spalin u paty komína $t_{1,s} = 400\ {}^\circ\mathrm{C}$, hustota spalin u paty komína $\rho_{1,s} = 0{,}9\ \mathrm{kg/m}^3$, tlak vzduchu u paty komína $p_a = 10^5\ \mathrm{Pa}$ a průměrná hustota vzduchu $\overline{\rho}_v = 1{,}2\ \mathrm{kg/m}^3$. Uvažujte konstantní pokles teploty spalin po délce komína $C = 1{,}5\ \mathrm{K/m}$.

Řešení: Odtah spalin je zajišťován pod tlakem Δp, který vzniká jako rozdíl tlaku okolního vzduchu p_a a spalin v komíně na úrovni paty komína. Velikost podtlaku určíme z Bernoulliho rovnice, kterou si napíšeme pro dva průřezy komína (pata a ústí), tj.

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho_{1,s}v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2}\rho_{2,s}v_2^2 + h\overline{\rho}_s g + \Delta p_z\,,$$

kde tlak u ústí komína je roven tlaku okolního vzduchu $p_2 = p_a - h\overline{\rho}_v g$ a $\overline{\rho}_s$ je průměrná hustota spalin. Pro hodnotu podtlaku Δp, který v komíně vzniká a který umožňuje odtah spalin, platí

$$\Delta p = p_a - p_1 = hg(\overline{\rho}_v - \overline{\rho}_s) + \frac{1}{2}\rho_{1,s}v_1^2 - \frac{1}{2}\rho_{2,s}v_2^2 - \Delta p_z\,.$$

Nyní si musíme určit hustotu spalin u ústí komína při teplotě $t_{2,s} = t_{1,s} - C \cdot h = 343\ {}^\circ\mathrm{C}$. Použijeme-li stavové rovnice ideálního plynu a uvážíme, že $p_1 \doteq p_2$, potom obdržíme

$$\rho_{2,s} = \frac{T_{1,s}}{T_{2,s}}\rho_{1,s} = 0{,}983\ \mathrm{kg/m}^3\,.$$

Rychlosti spalin v komíně vypočteme pomocí rovnice kontinuity, tj.

$$v_1 = Q_v / S_1 = 3{,}7\ \mathrm{m/s}\,,$$

resp.

$$v_2 = Q_v / S_2 = 4{,}6\ \mathrm{m/s}\,.$$

Dosazením získáme hodnotu $\Delta p = 22{,}1\ \mathrm{Pa} > 0$, což značí, že v komíně při daných podmínkách vzniká podtlak a tedy spaliny mohou být odváděny z komína.