Termodynamické děje v plynech

4. Kyslík o objemu $V_1 = 5\,l$ a tlaku $p_1 = 1\,\text{MPa}$ se rozpíná na trojnásobný objem (tj. $V_2 = \nu V_1$, $\nu = 3$). Vypočtěte výsledný tlak p_2 a práci A, kterou plyn vykoná. Uvažujte, že plyn se chová ideálně a že změna stavu probíhá izobaricky, izotermicky nebo adiabaticky. Molární hmotnosti kyslíku je $M = 32\cdot 10^{-3}\,\text{kg/mol}$.

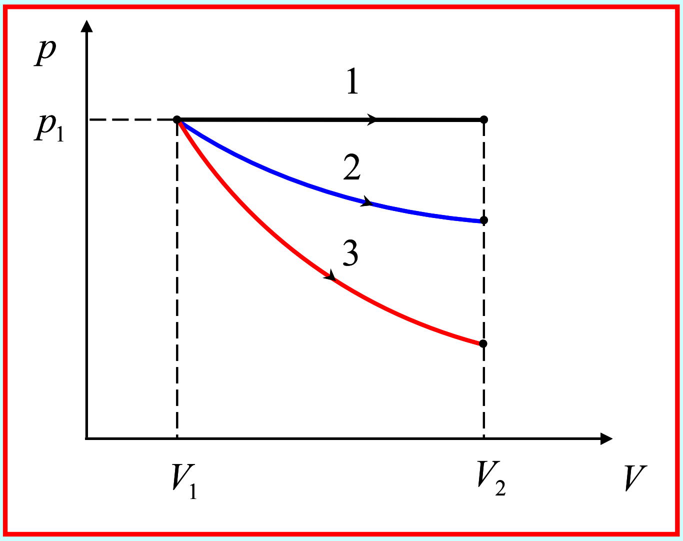
Řešení: Podle první termodynamické věty platí $Q = \Delta U + A = \Delta U + p\,\mathrm{d}V$. Pro izobarický děj platí $p_2 = p_1 = 1\,\text{MPa} = \text{konst.}$ a práce se určí ze vztahu

$$A_1 = \int_{V_1}^{V_2} p_1 \mathrm{d}V = p_1(V_2 - V_1) = p_1 V_1(\nu - 1) = 10\,\text{kJ}.$$

Pro izotermický děj je $T = \text{konst.}$ a ze stavové rovnice ideálního plynu můžeme vyjádřit výsledný tlak jako

$$p_2 = \frac{p_1 V_1}{V_2} = \frac{p_1}{\nu} = 0{,}33\,\text{MPa}.$$

Práce, kterou plyn vykoná při izotermickém ději je potom dána vztahem



$$A_2 = \int_{V_1}^{V_2} p\,\mathrm{d}V = p_1 V_1 \int_{V_1}^{V_2} \frac{\mathrm{d}V}{V} = p_1 V_1 \ln\frac{V_2}{V_1} = p_1 V_1 \ln\nu = 5{,}5\,\text{kJ}.$$

Při adiabatickém ději neprobíhá výměna tepla Q s okolním prostředím a tedy platí

$$Q = 0, \qquad A = -\Delta U, \qquad pV^{\kappa} = \text{konst.}, \quad \kappa = (i+2)/i = 1{,}4, \quad C_v = \frac{i}{2}R, \quad i = 5,$$

kde $i = 5$ je počet stupňů volnosti molekuly kyslíku. Pro výsledný tlak plynu tedy platí

$$p_2 = p_1\left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\kappa} = p_1 \nu^{-\kappa} = 0{,}21\,\text{MPa}.$$

Pro práci vykonanou ideálním plynem vypočteme užitím stavové rovnice ideálního plynu

$$A_3 = -\Delta U = \frac{m}{M} C_V (T_2 - T_1) = \frac{m}{M}\frac{i}{2} R(T_1 - T_2) = \frac{i}{2}(p_1 T_1 - p_2 T_2) = 4{,}63\,\text{kJ}.$$

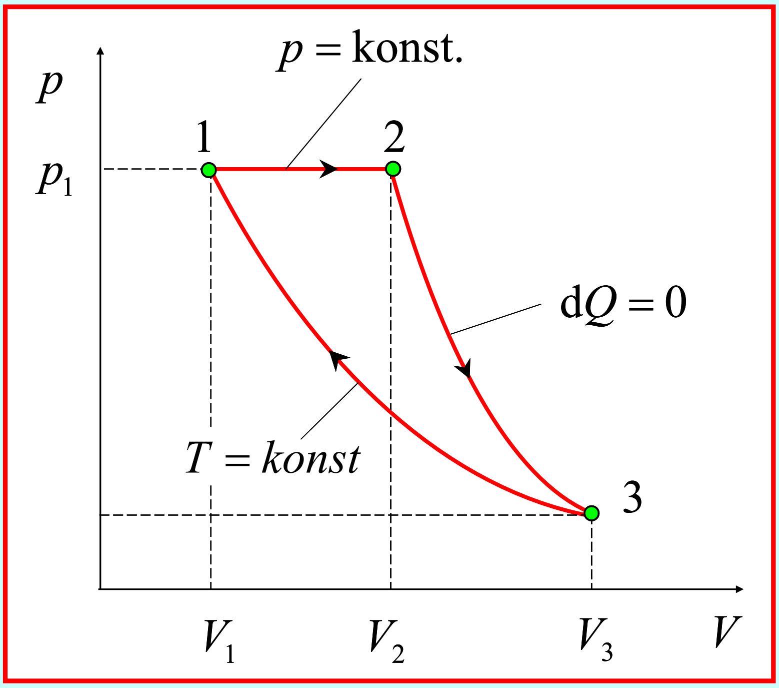
5. Vypočtěte účinnost η tepelného oběhu ideálního plynu o látkovém množství *n*, který je složen z izobarického, adiabatického a izotermického děje. Tepelný stroj vykonává svůj oběh mezi teplotami $T_1 = 300\ \mathrm{K}$ a $T_2 = 600\ \mathrm{K}$.

Řešení:

Účinnost tepelného cyklu určíme jako

$$\eta = \frac{Q_{12} - Q_{31}}{Q_{12}},$$

kde Q_{12} je teplo dodané při izobarickém rozpínání a Q_{31} je teplo odevzdané při izotermickém stlačování. Pro jednotlivé děje platí



a) *izobarický děj* ($p = \mathrm{konst.}$)

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{T_2}{T_1},$$

$$Q_{12} = nC_p(T_2 - T_1),$$

b) *adiabatický děj* ($\mathrm{d}Q = 0$)

$$T_2 V_2^{\kappa-1} = T_3 V_3^{\kappa-1},$$

$$\kappa = C_p / C_v, \quad C_p = C_v + R,$$

c) *izotermický děj* ($T = \mathrm{konst.}$), tj. $T_1 = T_3$,

$$Q_{31} = nRT_1 \ln\frac{V_3}{V_1} = nRT_1 \ln\frac{V_3 T_2}{V_2 T_1} = nRT_1 \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\frac{\kappa}{\kappa-1}} = nRT_1 \frac{\kappa}{\kappa-1} \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = nT_1 C_p \ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right).$$

Účinnost daného cyklu je poté rovna

$$\eta = \frac{Q_{12} - Q_{31}}{Q_{12}} = \frac{(T_2 - T_1) - T_1 \ln(T_2 / T_1)}{(T_2 - T_1)} = 30{,}7\%\,.$$