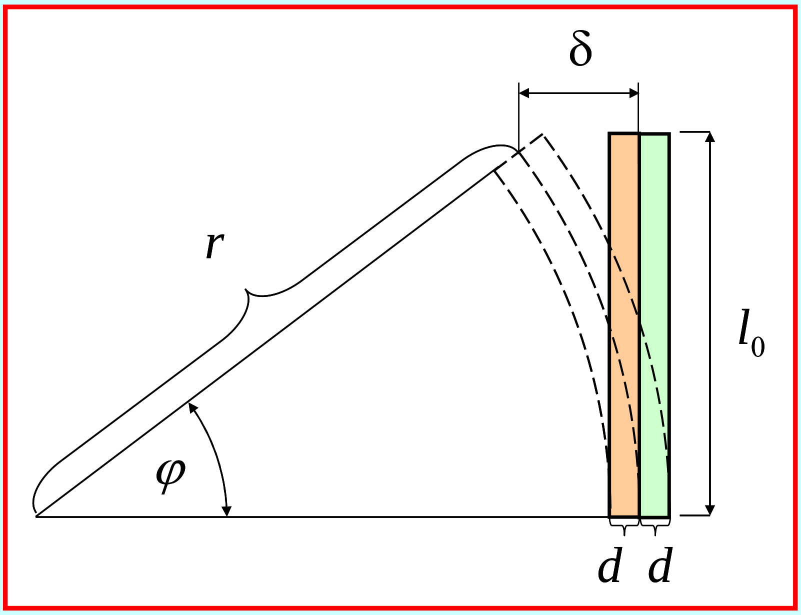
Teplotní roztažnost a rozpínavost látek

1. Bimetal je zhotoven z ocelového a měděného pásku a jeho jeden konec je upevněn k vodorovné podložce (viz.obr.). Určete závislost průhybu δ okraje bimetalu na teplotě t, jestliže při teplotě $t_0 = 0^\circ\mathrm{C}$ mají oba pásky bimetalu stejnou délku $l_0 = 10\,\mathrm{cm}$ a tloušťku $d = 1\,\mathrm{mm}$. Vypočtěte průhyb bimetalu pro teplotu $t = 30^\circ\mathrm{C}$, jestliže součinitel délkové teplotní roztažnosti pro ocel $\alpha_1 = 1{,}2\cdot10^{-5}\,\mathrm{K}^{-1}$ a pro měď $\alpha_2 = 1{,}7\cdot10^{-5}\,\mathrm{K}^{-1}$.

Řešení:
Každý pásek bimetalu si budeme charakterizovat jeho střednicí, která bude mít po zahřátí o Δt délku

$l_1 = l_0(1+\alpha_1\Delta t)$, $\quad l_2 = l_0(1+\alpha_2\Delta t)$.



Pro délky l_1, l_1 střednic pásků též platí $l_1 = \varphi(r - d/2)$ a $l_2 = \varphi(r + d/2)$, kde r je poloměr křivosti oblouku bimetalu a φ je úhel příslušný tomuto zakřivení. Platí tedy rovnosti

$l_0(1+\alpha_1\Delta t) = \varphi(r - d/2)$, $\quad l_0(1+\alpha_2\Delta t) = \varphi(r + d/2)$.

Podělením obou rovnic získáme

$$\frac{(1+\alpha_2\Delta t)}{(1+\alpha_1\Delta t)} = \frac{(r+d/2)}{(r-d/2)} \quad \Rightarrow \quad r = \frac{[2+(\alpha_2+\alpha_1)\Delta t]d}{2(\alpha_2-\alpha_1)\Delta t}.$$

Pro úhel φ potom platí

$$\varphi = \frac{l_0(1+\alpha_1\Delta t)}{(r-d/2)} = \frac{l_0}{d}(\alpha_2-\alpha_1)\Delta t.$$

Odchylka δ volného okraje bimetalu od původní svislé polohy je $\delta = r(1-\cos\varphi) = 0{,}75\,\mathrm{mm}$.

2. Určete, jaké množství ledu o hmotnosti $m_1 = 1\,\mathrm{kg}$ a o teplotě $t_1 = 0^\circ\mathrm{C}$ roztálo při ponoření do $m_2 = 1\,\mathrm{kg}$ vody o teplotě $t_2 = 50^\circ\mathrm{C}$ v kalorimetru s tepelnou kapacitou $K = 150\ \mathrm{J/K}$. Měrná tepelná kapacita vody $c = 4186\ \mathrm{J\,kg^{-1}K^{-1}}$ a měrné skupenské teplo tání ledu $l_t = 333{,}2\ \mathrm{kJ\,kg^{-1}}$.

Řešení: Nejprve zjistíme, zda roztaje celé množství ledu tím, že porovnáme teplo Q_1, které musí led ($m_1 = 1\,\mathrm{kg}$) přijmout, aby roztál, s teplem Q_2, které musí odevzdat soustava voda + kalorimetr při ochlazení na teplotu $t_1 = 0^\circ\mathrm{C}$. Platí

$$Q_1 = m_1 l_t = 333{,}2\ \mathrm{kJ}, \qquad Q_2 = (K + m_2 c)(t_2 - t_1) = 216{,}8\ \mathrm{kJ}.$$

Jelikož $Q_1 > Q_2$, tak neroztaje veškerý led, ale pouze

$$m_x = \frac{Q_2}{l_t} = \frac{(K + m_2 c)(t_2 - t_1)}{l_t} \doteq 0{,}65\ \mathrm{kg}.$$

3. Určete Poissonův součinitel κ směsi helia o hmotnosti $m_1 = 8\,\mathrm{g}$ a vodíku o hmotnosti $m_2 = 2\,\mathrm{g}$. Molární hmotnosti plynů jsou $M_1 = 4\cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg/mol}$ a $M_2 = 2\cdot 10^{-3}\,\mathrm{kg/mol}$. Předpokládejte, že plyny se chovají jako ideální plyn.

Řešení: Poissonův součinitel κ je definován jako poměr tepelných kapacit při stálém tlaku c_p a stálém objemu c_v. Pro směs ideálních plynů můžeme psát bilanci tepla při změně teploty o ΔT jako

$$\Delta Q = \Delta Q_1 + \Delta Q_2, \qquad \Delta Q = c(m_1 + m_2)\Delta T, \qquad \Delta Q_1 = c_1 m_1 \Delta T, \qquad \Delta Q_2 = c_2 m_2 \Delta T.$$

Z předchozích vztahů jednoduše můžeme vyjádřit měrné tepelné kapacity při stálém objemu resp. při stálém tlaku jako

$$c_v = \frac{c_{v1} m_1 + c_{v2} m_2}{m_1 + m_2}, \qquad \text{resp.} \qquad c_p = \frac{c_{p1} m_1 + c_{p2} m_2}{m_1 + m_2}.$$

Pro tepelnou kapacitu ideálního plynu platí

$$c_v = \frac{i}{2}\frac{R}{M} \qquad \text{a} \qquad c_p = \frac{i+2}{2}\frac{R}{M},$$

kde i je počet stupňů volnosti molekul plynu ($i_1 = 3, i_2 = 5$). Dosazením do výsledných vztahů pro tepelné kapacity směsi plynů získáme pro Poissonův součinitel vztah

$$\kappa = \frac{c_p}{c_v} = \frac{\left(\frac{i_1+2}{2}\frac{R}{M_1} m_1 + \frac{i_2+2}{2}\frac{R}{M_2} m_2\right)}{\left(\frac{i_1}{2}\frac{R}{M_1} m_1 + \frac{i_2}{2}\frac{R}{M_2} m_2\right)} = \frac{(i_1+2)\frac{m_1}{M_1} + (i_2+2)\frac{m_2}{M_2}}{i_1 \frac{m_1}{M_1} + i_2 \frac{m_2}{M_2}} = 1{,}55.$$