Mechanické kmitání

28. Určete, s jakou periodou T bude kmitat kámen vhozený do šachty provrtané skrze střed Země (ze severního pólu na jižní pól) a jakou rychlostí v proletí středem Země. Pro jednoduchost zanedbejte odpor prostředí a uvažujte Zemi jako plnou homogenní kouli o hustotě ρ a poloměru $R = 6378\ \text{km}$.

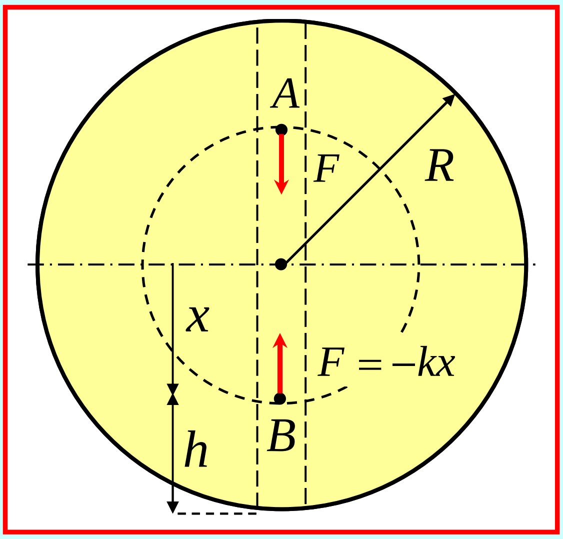
Řešení:
V hloubce h pod povrchem Země působí na hmotný bod gravitační síla F, která závisí pouze na hmotě M' části Země o poloměru $x = (R-h)$, tj. platí

$$M' = \frac{4}{3}\pi\rho(R-h)^3,$$

$$F = \kappa\frac{mM'}{(R-h)^2} = \frac{4\kappa\pi\rho m}{3}(R-h) = \frac{\kappa mM}{R^3}(R-h) = \frac{a_g m}{R}x = kx,$$

kde $a_g = 9{,}81\ \text{m/s}^2$ je gravitační zrychlení na povrchu Země. Z tvaru síly F vidíme, že kámen bude vykonávat harmonický pohyb s amplitudou R a periodou

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{a_g}} = 5066\ \text{s} = 1\,\text{hod}\ 24\,\text{min}\ 26\ \text{s}.$$



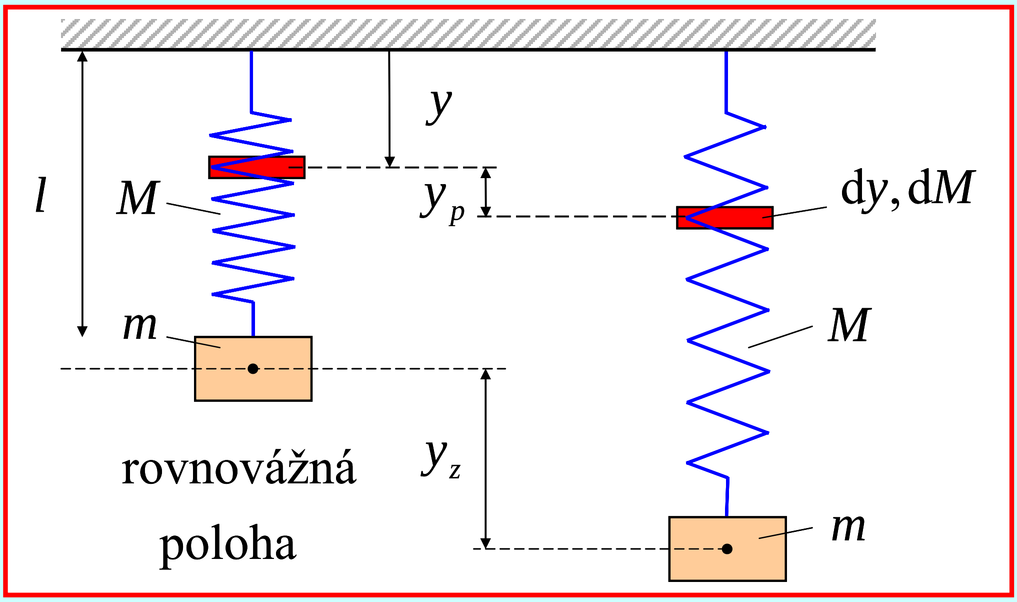
Maximální rychlost při průletu středem Země je rovna

$$v_{\max} = \frac{2\pi}{T}R = \sqrt{a_g R} = 7910\ \text{m/s}.$$

29. Určete, s jakou úhlovou frekvencí ω bude kmitat závaží o hmotnosti $m = 0{,}5\ \text{kg}$ na pružině s tuhostí $k = 20\ \text{N/m}$, délkou l a hmotností $M = 0{,}3\ \text{kg}$. Uvažujte s hmotností pružiny.

Řešení: V tomto případě musíme počítat nejen s hmotností závaží, ale i s hmotností pružiny. Nechť závaží kmitá harmonicky s amplitudou A a úhlovou frekvencí ω, potom pro výchylku a rychlost závaží platí

$$y_z = A\sin\omega t\,,\quad v_z = A\omega\cos\omega t\,.$$



Pokud budeme uvažovat, že se pružina natahuje rovnoměrně, tak platí pro okamžitou výchylku a rychlost bodu $y \in \langle 0, l \rangle$ pružiny

$$y_p = \frac{A}{l} y \sin\omega t\,,\qquad v_p = \frac{A}{l} y\omega\cos\omega t\,.$$

Podle zákona zachování mechanické energie platí $W_k + W_p = \text{konst.}$ V okamžiku, kdy dosáhne závaží maximální výchylky $y_z = A$ bude kinetická energie nulová $W_{k1} = 0$ a potenciální energie bude maximální. Potenciální energii určíme jako práci potřebnou k natažení pružiny o $y_z = A$, tj.

$$W_{p1} = \int_0^A F\,\mathrm{d}y = \int_0^A ky\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}kA^2\,.$$

Naopak v rovnovážné poloze $y_z = 0$ (tj. $t = mT$, $m = 1,2,3,\ldots$) bude potenciální energie nulová $W_{p2} = 0$ a kinetická energie je součtem kinetické energie pružiny a závaží, tj.

$$W_{k2} = \frac{1}{2} m v_z^2 + \frac{1}{2} \int v_p^2 \mathrm{d}M = \frac{1}{2} m A^2 \omega^2 + \frac{1}{2} \int_0^l \frac{A^2}{l^2} y^2 \omega^2 \frac{M}{l} \mathrm{d}y = \frac{1}{2} A^2 \omega^2 (m + M/3).$$

Dosazením do zákona zachování energie $W_{k1} + W_{p1} = W_{k2} + W_{p2}$ dostaneme

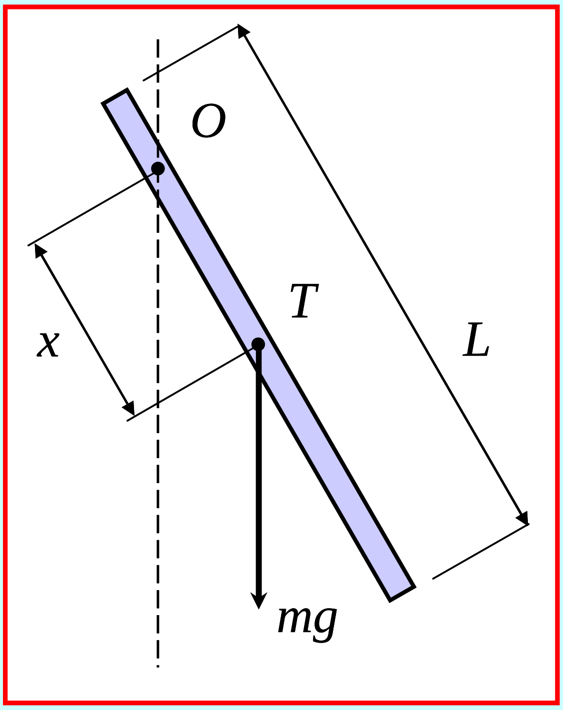
$$k = (m + M/3)\omega^2 \qquad \Rightarrow \qquad \omega = \sqrt{\frac{k}{m + M/3}} = 5{,}77\ \mathrm{s}^{-1}.$$

30. Fyzikální kyvadlo tvoří tenká homogenní tyč délky $L = 35\,\text{cm}$. Určete, v jaké vzdálenosti x od těžiště tyče musíme umístit osu otáčení kyvadla, aby frekvence kmitů byla maximální.

Řešení:

Pro dobu kmitu T a kruhovou frekvenci ω kyvadla platí

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgx}}, \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{mgx}{J}}.$$



Moment setrvačnosti J tyče vzhledem k ose otáčení určíme podle Steinerovy věty

$$J = J_0 + mx^2 = \frac{m}{12}L^2 + mx^2,$$

kde J_0 je moment setrvačnosti tyče vzhledem k ose procházející těžištěm. Pro kruhovou frekvenci ω tedy dostáváme

$$\omega = \sqrt{\frac{mgx}{\frac{m}{12}L^2 + mx^2}} = \sqrt{\frac{12gx}{L^2 + 12x^2}}.$$

Maximální frekvenci určíme pomocí extrému funkce, tj. musí platit

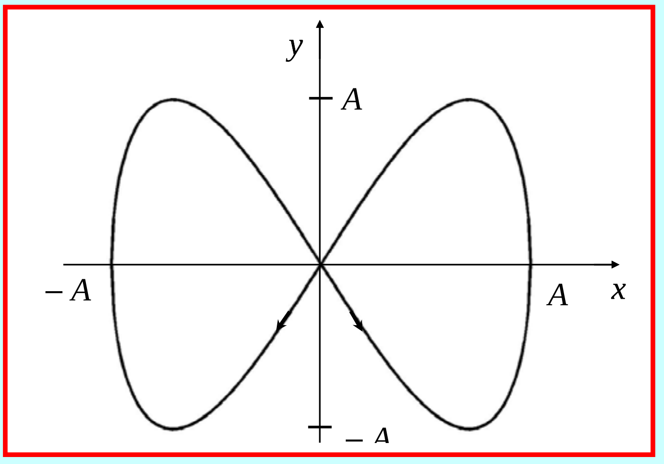
$$\frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}x} = \frac{\sqrt{3g}\,(L^2 - 12x^2)}{\sqrt{x(L^2 + 12x^2)}} = 0.$$

Z předchozí nutné podmínky pro extrém funkce plyne, že maximální frekvenci bude mít tyč při zavěšení ve vzdálenosti $x = L/\sqrt{12} = 10{,}1\,\text{cm}$ od těžiště.

31. Hmotný bod koná harmonický pohyb ve dvou navzájem kolmých směrech x a y podle rovnic $x = A\sin\omega t$ a $y = A\sin 2\omega t$. Určete po jaké trajektorii se tento bod pohybuje.

Řešení:

Abychom určili trajektorii pohybu hmotného bodu (viz.obr.), musíme vyloučit z rovnic pro x a y čas t. Platí



$$\frac{x}{A} = \sin\omega t\,,$$

$$\cos\omega t = \sqrt{1-\sin^2\omega t} = \sqrt{1-\frac{x^2}{A^2}}\,.$$

$$\frac{x^2}{y^2} = \left(\frac{A\sin\omega t}{2A\sin\omega t\cos\omega t}\right)^2 = \frac{1}{4\cos^2\omega t}\,,$$

$$\frac{1}{4\cos^2\omega t} = \frac{1}{4}\left(1-\frac{x^2}{A^2}\right)^{-1} = \frac{x^2}{y^2} \qquad \Rightarrow \qquad y^2 = 4x^2\left(1-\frac{x^2}{A^2}\right).$$

32. Perioda tlumených kmitů $T = 0{,}2\ \mathrm{s}$, přičemž poměr amplitud $A_i = A(iT)$ je roven $A_1 / A_6 = k = 13$. Vypočtěte rezonanční frekvenci kmitající soustavy.

<u>Řešení</u>:

Pro amplitudy tlumených kmitů platí

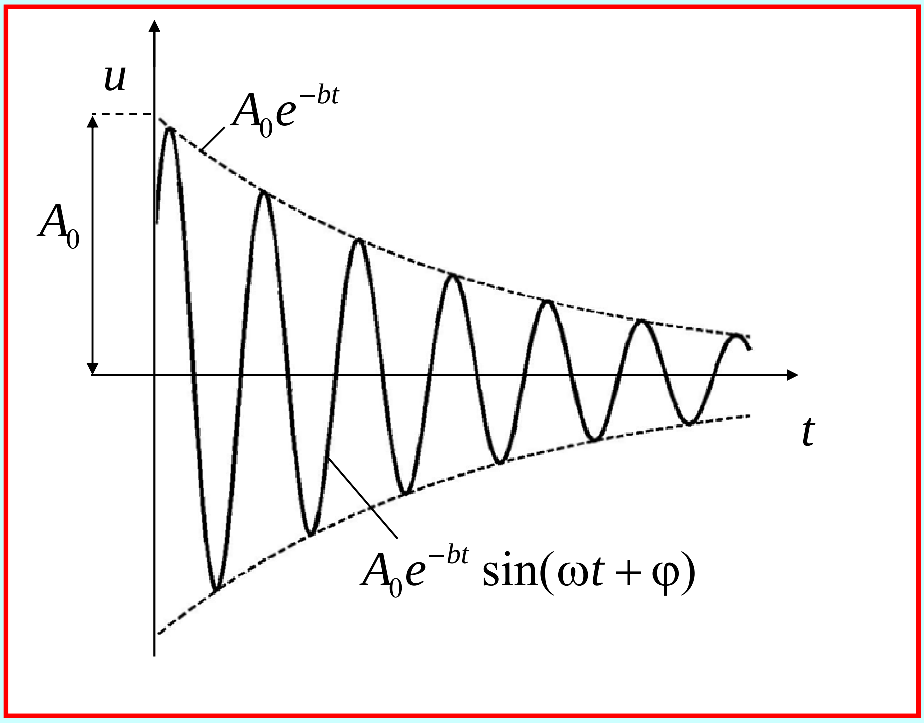
$A_1 = A_0 e^{-bT}$, $\qquad A_6 = A_0 e^{-6bT}$,

$$\frac{A_1}{A_6} = e^{5bT} = k \qquad \Rightarrow \qquad b = \frac{\ln k}{5T}.$$

Kruhová frekvence ω tlumených kmitů se vypočte jako

$$\omega = \frac{2\pi}{T}, \qquad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - b^2} \qquad \Rightarrow \qquad \omega_0^2 = \frac{4\pi^2}{T^2} + b^2,$$

kde ω je kruhová frekvence tlumených kmitů a ω_0 je kruhová frekvence volných harmonických kmitů.



Pro rezonanční frekvenci f_r poté platí

$$f_r = \frac{1}{2\pi}\omega_r = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\omega_0^2 - 2b^2} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{4\pi^2}{T^2} - b^2} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{4\pi^2}{T^2} - \left(\frac{\ln k}{5T}\right)^2} = 4{,}98\ \mathrm{s}^{-1}.$$