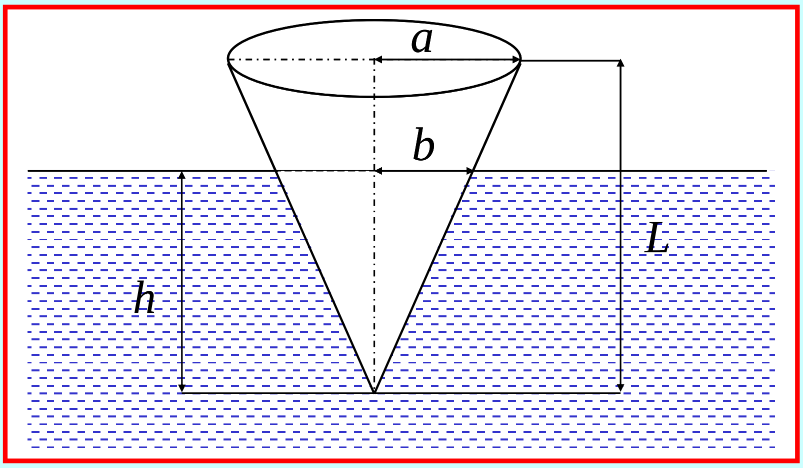
Mechanika tekutin

21. Určete, do jaké hloubky h se ponoří kužel výšky $L = 100\ \mathrm{mm}$ z materiálu o hustotě $\rho_1 = 800\ \mathrm{kg/m^3}$ ve vodě s hustotou $\rho_2 = 1000\ \mathrm{kg/m^3}$. Kužel je zanořen do vody svým vrcholem.

Řešení: Podle Archimédova zákona při plování musí být tíha G kužele rovna vztlakové síle F_{vz}, tj. $G = F_{vz}$, kde



$$F_{vz} = V'\rho_2 g = \frac{1}{3}\pi b^2 h \rho_2 g\ ,$$

$$G = V\rho_1 g = \frac{1}{3}\pi a^2 L \rho_1 g\ .$$

Jelikož dále platí $b/h = a/L$, potom dosazením získáme pro hloubku ponoření

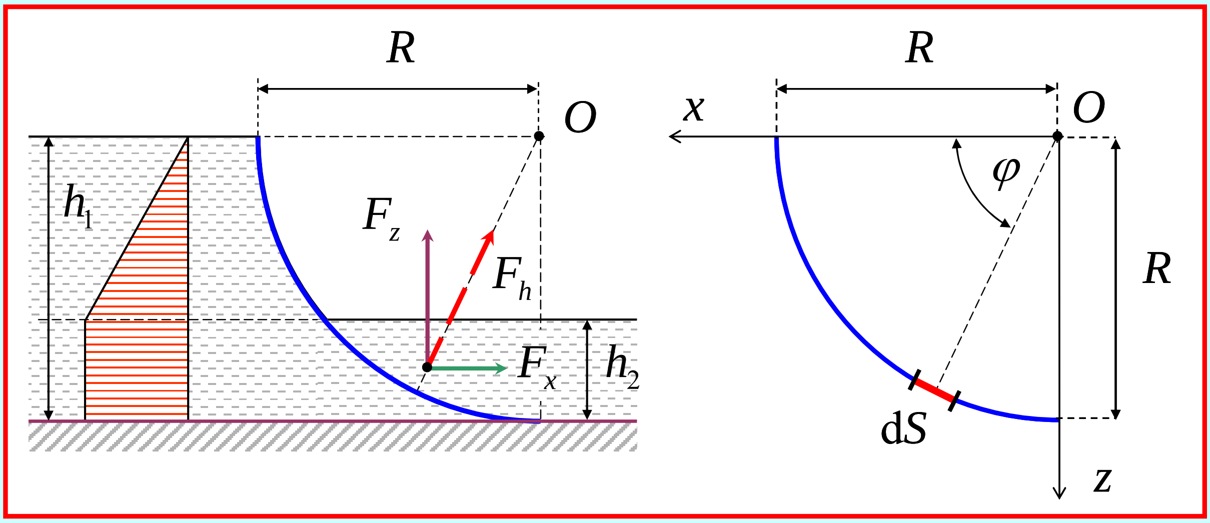
$$h = L\sqrt[3]{\frac{\rho_1}{\rho_2}} = 92{,}8\ \mathrm{mm}\ .$$

22. Určete působiště, směr a velikost výslednice tlakových sil působící na segmentový válcový uzávěr jezu s horní a dolní zdrží (viz.obr.). Uzávěr má v řezu tvar čtvrtkružnice o poloměru $R = 3\ \mathrm{m}$ a šířka uzávěru je $b = 10\ \mathrm{m}$. Na jedné straně sahá vodní hladina do výšky $h_1 = R = 3\ \mathrm{m}$ a na druhé straně do výšky $h_2 = 1\ \mathrm{m}$ nade dno. Hustota vody $\rho = 1000\ \mathrm{kg\,m^{-3}}$.

Řešení: Na uzávěr působí hydrostatický tlak p_h kapaliny (vody) ve směru normály k dané válcové ploše, tj.

$$p_h = \rho g z\,, \qquad \text{pro } z \in \langle 0, h_1 - h_2 \rangle\,,$$

$$p_h = \rho g (h_1 - h_2)\,, \qquad \text{pro } z \in \langle h_1 - h_2, h_1 \rangle\,.$$



Tomuto tlaku odpovídá hydrostatická síla $\mathrm{d}F_h = p_h \mathrm{d}S = \rho g z\, \mathrm{d}S$. Tuto sílu si můžeme rozložit do jednotlivých složek ve směru osy *x* a *z*, tj. $\mathrm{d}F_x = p_h \mathrm{d}S_x$, $\mathrm{d}F_z = p_h \mathrm{d}S_z$, kde S_x, S_z jsou průměty válcové plochy uzávěru do rovin *yz* a *xy*. Pro náš příklad tedy vypočteme

$$F_x = \int p_h \mathrm{d}S_x = \int_0^{h_1 - h_2} \rho g z\, b\,\mathrm{d}z + \int_{h_1 - h_2}^{h_1} \rho g (h_1 - h_2)\, b\,\mathrm{d}z = \rho g\, b\left[\frac{(h_1 - h_2)^2}{2} + (h_1 - h_2) h_2\right] = \frac{\rho g\, b (h_1^2 - h_2^2)}{2}\,,$$

$$F_x = \int p_h \mathrm{d}S_z = \int_0^R \rho g z\, b\,\mathrm{d}x = \rho g b \int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}\,\mathrm{d}x = \rho g b R^2 \int_0^{\pi/2} \cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{\pi \rho g b R^2}{4}\,.$$

Výsledná hydrostatická síla F_h působící na uzávěr prochází osou válcové plochy pod úhlem φ, kde

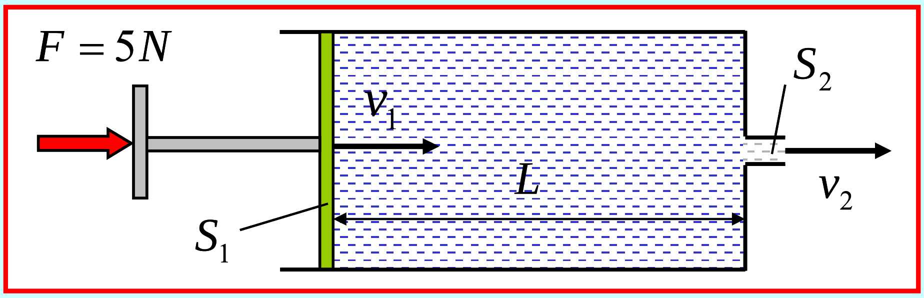
$$\mathrm{tg}\,\varphi = \frac{F_z}{F_x} = \frac{\pi R^2}{2(h_1^2 - h_2^2)} \quad \Rightarrow \quad \varphi = 60^\circ 29'\,,$$

$$F_h = \sqrt{F_x^2 + F_z^2} = \frac{\rho g b}{4}\sqrt{4(h_1^2 - h_2^2) + \pi R^2} = 190\ \mathrm{kN}\,.$$

23. Injekční stříkačka délky L = 5 cm je naplněna vodou, přičemž plocha pístu S_1 = 1,5 cm^2, plocha otvoru S_2 = 0,8 mm^2 a hustota vody $\rho = 1000\,\mathrm{kg/m^3}$. Vypočtěte, za jakou dobu t vyprázdníme stříkačku, jestliže působíme na píst stálou silou F = 5 N. Zanedbejte tření pístu a vnitřní tření v kapalině.

Řešení: Pro výtok kapaliny otvorem stříkačky platí rovnice kontinuity a Bernoulliho rovnice, tj.

$$S_1 v_1 = S_2 v_2\,, \qquad \frac{\rho v_1^2}{2} + p = \frac{\rho v_2^2}{2}\,, \qquad p = \frac{F}{S_1}\,.$$



Vyjádříme-li z rovnice kontinuity rychlost v_2 výtoku kapaliny ze stříkačky a dosadíme do Bernoulliho rovnice, potom obdržíme pro rychlost v_1 rovnoměrného posunu pístu ve stříkačce

$$\frac{\rho v_1^2}{2} + \frac{F}{S_1} = \frac{\rho}{2}\left(\frac{v_1 S_1}{S_2}\right)^2 \qquad \Rightarrow \qquad v_1 = \sqrt{\frac{2F}{\rho S_1\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} - 1\right)}}\,.$$

Pro čas t, za který se píst posune o vzdálenost L, platí

$$t = \frac{L}{v_1} = \sqrt{\frac{\rho S_1\left(\frac{S_1^2}{S_2^2} - 1\right)L^2}{2F}} = 1{,}15\ \mathrm{s}.$$

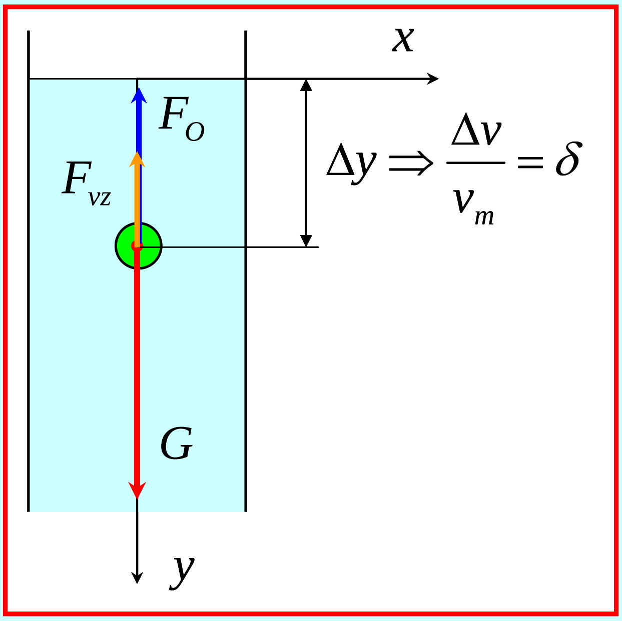
24. Určete, jak se bude pohybovat malá kulička o poloměru r v dostatečně široké svislé trubici naplněné kapalinou o hustotě ρ_1 a viskozitě η. Kulička je vyrobena z materiálu o hustotě ρ_2. Dále vypočtěte dráhu Δy, po které lze rychlost v kuličky považovat s relativní chybou δ za konstantní. Na počátku kuličku volně pustíme a sledujeme její pohyb.

Řešení: V kapalině působí na kuličku tíhová síla $G = mg = V\rho_k g$, vztlaková síla $F_{vz} = V\rho g$ a odporová síla, pro kterou platí podle Stokesova vzorce $F_o = 6\pi\eta r v$. Pohybová rovnice kuličky ve svislém směru tedy má tedy tvar

$$ma = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = G - F_{vz} - F_o = Vg(\rho_2 - \rho_1) - 6\pi\eta r v$$

,

kde $m = V\rho_k$ je hmotnost kuličky a V je objem kuličky.



Pohybovou rovnici můžeme pro jednoduchost přepsat jako

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = A - Bv,$$

$$A = g\left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right),$$

$$B = \frac{6\pi\eta r}{V\rho_2}.$$

Řešením předchozí diferenciální rovnice separací proměnných získáme

$$\int_0^v \frac{\mathrm{d}v}{A - Bv} = \int_0^t \mathrm{d}t \qquad \Rightarrow \qquad \ln\left(1 - \frac{B}{A}v\right) = -Bt \qquad \Rightarrow \qquad v = \frac{A}{B}\left(1 - e^{-Bt}\right).$$

Mezní rychlost v_m, které může kulička dosáhnout získáme pro čas $t \to \infty$, tj. $v_m = A/B$. Integrací rychlosti v podle času obdržíme pro dráhu s kuličky a relativní chybu δ vztahy

$$y = \int_0^t v\,\mathrm{d}t = \frac{A}{B^2}\left(Bt + e^{-Bt} - 1\right) \qquad \text{a} \qquad \delta = \frac{\Delta v}{v_m} = \frac{v_m - v}{v_m} = 1 - \frac{B}{A}v = e^{-Bt},$$

z čehož pro čas t a dráhu Δy dostaneme

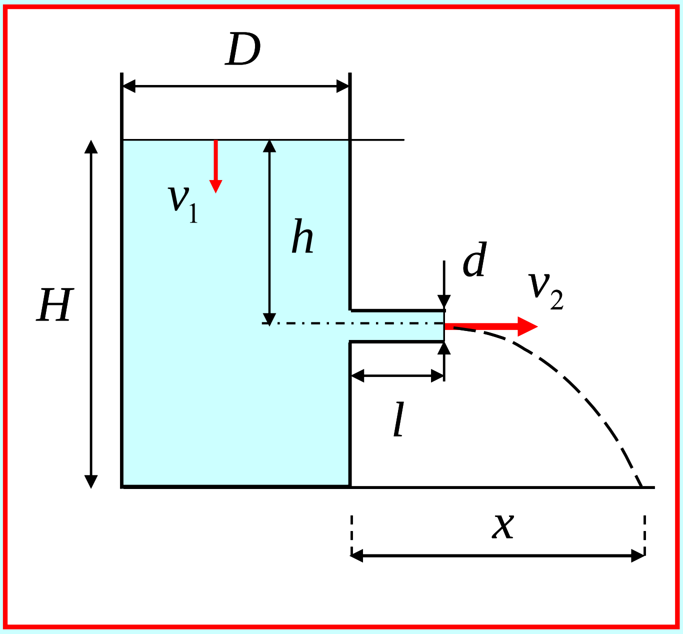
$$t = -\frac{\ln\delta}{B} \qquad \Rightarrow \qquad \Delta y = y(t) = \frac{A}{B^2}(\delta - \ln\delta - 1).$$

25. Do stěny válcové nádoby o průměru D a výšce H je zabudována tenká vodorovná trubička s vnitřním průměrem d a délkou l. V nádobě je kapalina o dynamické viskozitě η. Určete závislost rychlosti v_1, kterou klesá kapalina v nádobě, na výšce hladiny h kapaliny nad výtokovým otvorem a dále vypočtěte vzdálenost od hrany nádoby, kam dopadá vodní paprsek na vodorovnou rovinu v úrovni dna nádoby.

Řešení:

Pro průtok viskózní kapaliny válcovou trubičkou při laminárním proudění platí podle Hagen-Poiseuilleova zákona

$$Q = \frac{\pi r^4 \Delta p}{8\eta l}, \quad \Delta p = \rho g h .$$



Průtok trubičkou je roven

$$Q = S_2 v_2 = \frac{\pi d^2}{4} v_2 .$$

Porovnáme-li oba výrazy pro průtok, můžeme vyjádřit výtokovou rychlost v_2 a následným použitím rovnice kontinuity i rychlost v_1 poklesu kapaliny v nádobě

$$v_2 = \frac{\rho g h d^2}{32\eta l},$$

$$v_1 = v_2 \frac{S_2}{S_1} = v_2 \frac{d^2}{D^2} = \frac{\rho g d^4}{32\eta l D^2} h .$$

Trajektorii paprsku kapaliny můžeme poté vyšetřovat jako vodorovný vrh z výšky $(H - h)$ rychlostí v_2. Pro vodorovnou vzdálenost x tedy vypočteme

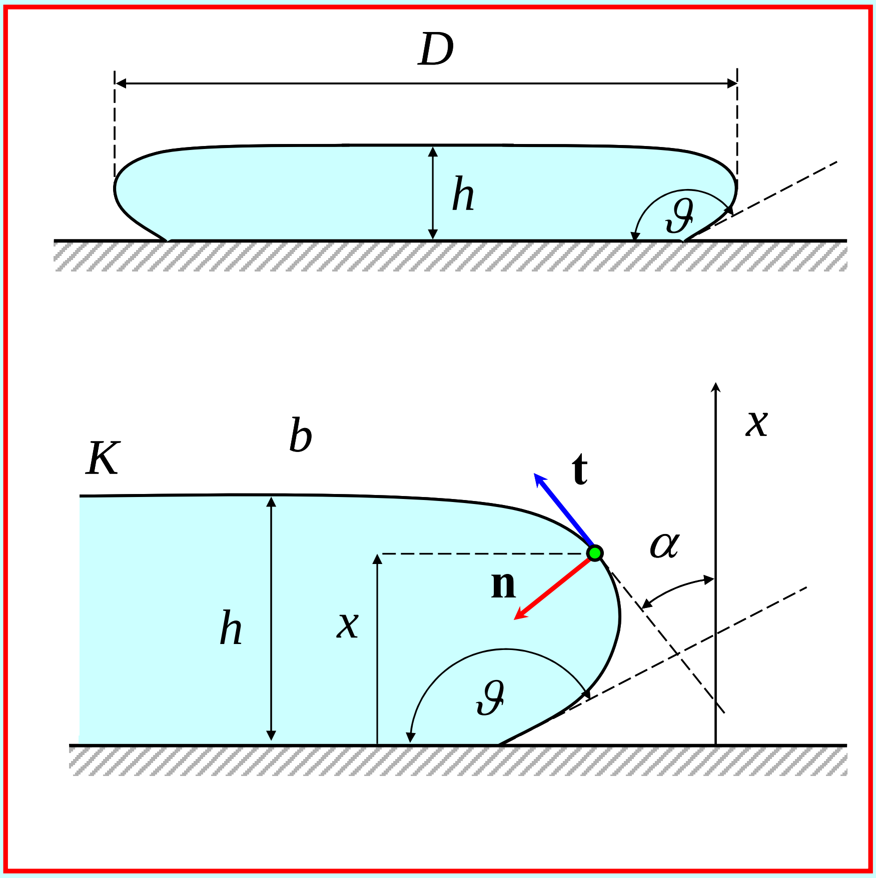
$$x = l + v_2 \sqrt{\frac{2(H-h)}{g}} .$$

26. Určete, jakou výšku h bude mít vrstva rtuti na vodorovné skleněné podložce, jestliže krajní úhel pro rtuť $\vartheta = 138^\circ$, hustota rtuti $\rho = 13600\ \mathrm{kg/m^3}$ a povrchové napětí rtuti $\sigma = 0{,}5\ \mathrm{N/m}$.

Řešení:
Ve výšce x nad skleněnou podložkou bude pro bod povrchu vrstvy rtuti platit rovnost kapilárního tlaku p_k, vyvolaného zakřivením povrchu kapaliny, a hydrostatického tlaku p_h, vyvolaného tíhou kapaliny. Platí

$$p_h = b + \rho g (h - x),$$

$$p_k = b + \sigma\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right),$$



kde b je atmosférický tlak okolního vzduchu, R_1 a R_2 jsou hlavní poloměry křivosti povrchu vrstvy v daném místě x. Jelikož vrstva rtuti je dostatečně velká, tj. $h << D$, potom $R_1 << R_2$ a pro kapilární tlak můžeme přibližně psát

$$p_k \doteq b + \sigma / R_1$$

Minimální poloměr křivosti R_1 se bude nacházet ve svislém řezu (rovina xy) a platí pro něj podle 1.Frenetova vzorce

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{t}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathbf{n}}{R_1}, \qquad \mathbf{t} = (t_x, t_y) = (\cos\alpha, \sin\alpha), \qquad \mathbf{n} = (n_x, n_y) = (-\sin\alpha, \cos\alpha),$$

kde **t** a **n** jsou jednotkové tečné a normálové vektory ke křivce svislého řezu K, α je úhel, který svírá tečna ke křivce K s osou x, a $\mathrm{d}s = \mathrm{d}x/\cos\alpha = \mathrm{d}y/\sin\alpha$ je element oblouku křivky K. Abychom určili R_1, stačí uvažovat pouze směr x, tj. platí

$$\frac{\mathrm{d}t_x}{\mathrm{d}s} = \frac{n_x}{R_1} \quad\Rightarrow\quad \frac{-\sin\alpha\cos\alpha\,\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}x} = \frac{-\sin\alpha}{R_1} \quad\Rightarrow\quad R_1 = \frac{\mathrm{d}x}{\cos\alpha\,\mathrm{d}\alpha}.$$

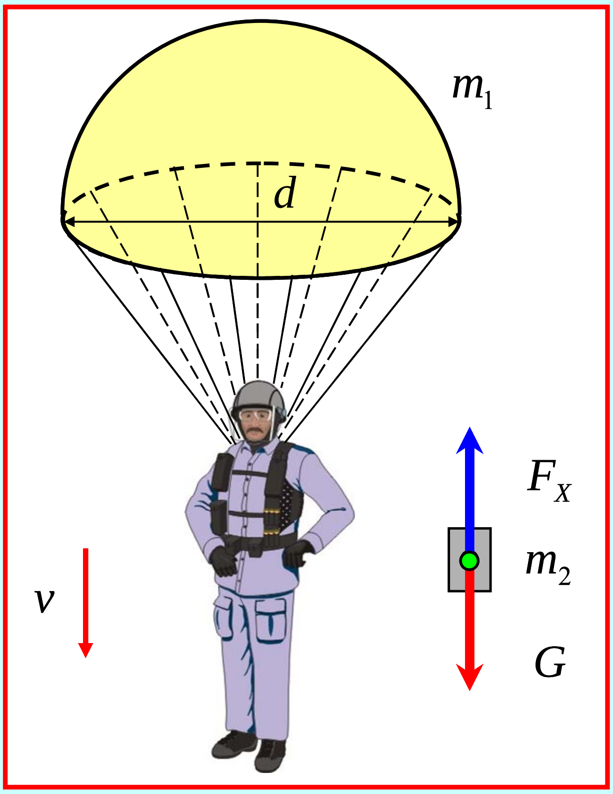
Dosazením do rovnice $p_k = p_h$ obdržíme $\rho g (h - x)\mathrm{d}x = \sigma\cos\alpha\,\mathrm{d}\alpha$ a integrací vypočteme pro výšku h

$$\int_0^h \rho g (h - x)\mathrm{d}x = \int_{\vartheta-\pi/2}^{-\pi/2} \sigma\cos\alpha\,\mathrm{d}\alpha \;\Rightarrow\; \frac{h^2\rho g}{2} = \sigma(1 - \cos\vartheta) \;\Rightarrow\; h = \sqrt{\frac{2\sigma}{\rho g}(1 - \cos\vartheta)} = 3{,}61\ \mathrm{mm}.$$

27. Parašutista o hmotnosti $m_2 = 85\ \mathrm{kg}$ skáče s padákem o hmotnosti $m_1 = 32\ \mathrm{kg}$. Po otevření má padák tvar duté polokoule s průměrem $d = 12\ \mathrm{m}$ a součinitel odporu $C_x = 1{,}3$. Určete mezní rychlost v, kterou dosáhne parašutista, jestliže hustota vzduchu je rovna $\rho = 1{,}29\ \mathrm{kg/m^3}$. Dále vypočtěte, jaké maximální rychlosti dosáhne parašutista, jestliže nerozevře padák. V tomto případě je charakteristická plocha $S' = 0{,}3\ \mathrm{m}^2$ a součinitel odporu $C_x' = 0{,}4$.

Řešení:

Parašutista dosáhne mezní rychlosti v okamžiku, kdy bude vyrovnána tíhová síla G silou odporovou F_x a silou vztlaku F_{vz}. Vztlakovou sílu můžeme při pohybu parašutisty ve vzduchu zanedbat a musí tedy platit



$$(m_1 + m_2)g = F_x\,,$$

$$F_x = C_x \frac{\rho v^2}{2} S\,,$$

$$S = \frac{\pi d^2}{4}\,.$$

Dosazením a jednoduchou úpravou dostaneme pro maximální rychlost

$$v = \sqrt{\frac{8(m_1 + m_2)g}{C_x \pi d^2 \rho}} = 3{,}48\ \mathrm{m/s}\,.$$

Jestliže se parašutistovi nerozevře padák, potom poletí maximální rychlostí

$$v' = \sqrt{\frac{2(m_1 + m_2)g}{S' C_x' \rho}} \doteq 122\ \mathrm{m/s}\,.$$