Gravitační pole

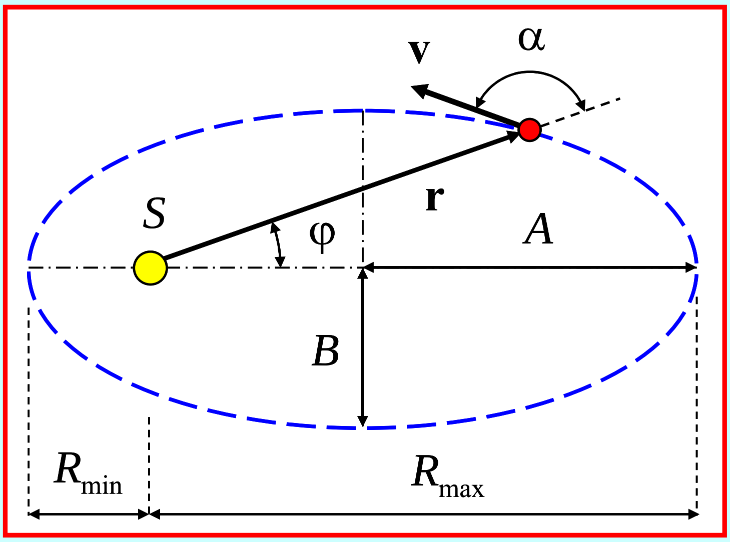
18. Perioda oběhu Halleyovy komety kolem Slunce je T = 76 let. Minimální vzdálenost od Slunce při jejím oběhu je $R_{\min} = 180 \cdot 10^9\,\mathrm{m}$. Určete její maximální vzdálenost $R_{\max}$, jestliže délka hlavní poloosy oběžné dráhy Země kolem Slunce je přibližně rovna $A_0 = 150 \cdot 10^9\,\mathrm{m}$ a doba oběhu je $T_0 = 365\,\text{dnů}$. Vypočtěte též minimální a maximální rychlost komety při oběhu.

Řešení: Kometa obíhá kolem Slunce po eliptické dráze (viz.obr.). Podle třetího Kepplerova zákona pro oběžné doby T a hlavní poloosy oběžných drah A platí

$$\frac{T^2}{T_0^2} = \frac{A^3}{A_0^3}.$$

Hlavní poloosu A oběžné dráhy komety můžeme určit z minimální a maximální vzdálenosti od ohniska elipsy jako

$$A = (R_{\max} + R_{\min})/2.$$



Dosazením z předchozích vztahů dostáváme pro maximální vzdálenost $R_{\max}$ a hlavní poloosu elipsy A

$$R_{\max} = 2A - R_{\min} = 2A_0\left(\frac{T}{T_0}\right)^{2/3} - R_{\min} = 5{,}2 \cdot 10^9\,\mathrm{km} \quad \text{a} \quad A = 2{,}69 \cdot 10^9\,\mathrm{km}.$$

Lineární výstřednost e eliptické dráhy a následně i velikost vedlejší poloosy B určíme ze vztahů

$$e = A - R_{\min} \qquad \Rightarrow \qquad B = \sqrt{A^2 - e^2} = \sqrt{2AR_{\min} - R_{\min}^2} \doteq 9{,}675 \cdot 10^8\,\mathrm{km}.$$

Plošná rychlost w komety je při oběhu konstantní a je rovna pro eliptickou dráhu

$$w = |\mathbf{w}| = |\mathbf{r} \times \mathbf{v}| = \frac{1}{2} r v \sin\alpha = \frac{S}{T} = \frac{\pi AB}{T} = 3{,}41 \cdot 10^{15}\,\mathrm{m^2/s} = \text{konst.},$$

kde r je velikost průvodiče $\mathbf{r}$ komety, v je velikost rychlosti $\mathbf{v}$, α je úhel, který svírá průvodič s vektorem rychlosti a S je plocha, kterou opíše průvodič za dobu T (plocha elipsy). Minimální resp. maximální rychlost v_1, v_2 vypočteme ze vztahu pro plošnou rychlost (pro hodnoty $r_1 = R_{\max}$, $\alpha_1 = 90^\circ$ a $r_2 = R_{\min}$, $\alpha_2 = 90^\circ$), tj.

$$v_1 = \frac{2w}{R_{\max}} = 1{,}3\,\mathrm{km/s} \qquad \text{a} \qquad v_2 = \frac{2w}{R_{\min}} = 37{,}9\,\mathrm{km/s}.$$

19. Vypočtěte průběh intenzity E a potenciálu φ gravitačního pole plné homogenní koule s hustotou ρ, hmotností M a poloměrem R .

Řešení:

Pro intenzitu **E** gravitačního pole při spojitém rozložení hmoty platí

$$\mathrm{d}\mathbf{E} = -\kappa \frac{\rho \mathrm{d}V}{r^3}\mathbf{r} ,$$

kde $\kappa = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3 kg s^{-2}}$ je gravitační konstanta. Uvažujme, že hmota spojitě vyplňuje uzavřenou plochu S, potom pro tok intenzity $\mathrm{d}T$ od elementu hmoty platí

$$\mathrm{d}T = \oint_S \mathrm{d}\mathbf{E}\mathrm{d}\mathbf{S} = -\kappa \oint_S \frac{\rho \mathrm{d}V}{r^3}\mathbf{r}\mathrm{d}\mathbf{S} = -\kappa\rho\mathrm{d}V \int_0^{4\pi} \mathrm{d}\Omega = -4\pi\kappa\rho\mathrm{d}V , \quad \text{kde} \quad \mathbf{r}\mathrm{d}\mathbf{S} = r\cos\alpha \mathrm{d}S ,$$

$\mathrm{d}S\cos\alpha = r^2\mathrm{d}\Omega$ je plošný element ve vzdálenosti r od objemového elementu $\mathrm{d}V$ a $\mathrm{d}\Omega$ je prostorový úhel, pod kterým můžeme pozorovat plošný element $\mathrm{d}S$ z daného místa. Pro celkový tok intenzity tedy integrací přes všechny objemové elementy získáme

$$T = -4\pi\kappa \int_V \rho \mathrm{d}V = -4\pi\kappa M ,$$

kde M je celková hmota uzavřená plochou S. Pro případ homogenní plné koule je vzhledem k symetrii rozložení hmoty intenzita v místě vzdáleném r od středu koule konstantní a má radiální směr. Potom tedy pro vnější bod $(r > R)$ platí

$$T = \int \mathbf{E}\mathrm{d}\mathbf{S} = -\int E\mathrm{d}S = -ES = -4\pi E r^2 \qquad \text{a} \qquad T = -4\pi\kappa M ,$$

z čehož odvodíme pro intenzitu

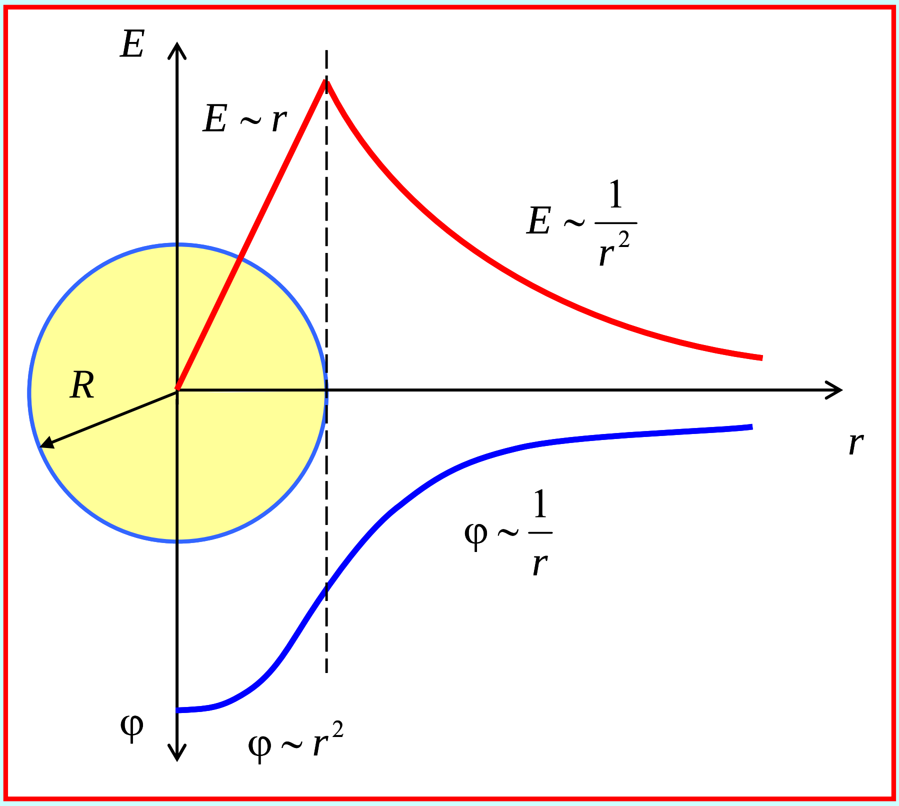
$$E = \kappa \frac{M}{r^2} .$$

Homogenní koule tedy budí ve svém okolí takové gravitační pole jako hmotný bod se stejnou hmotností, jenž je umístěn ve středu koule. Pro vnitřní bod koule $(r < R)$ platí

$$T = \int \mathbf{E}\mathrm{d}\mathbf{S} = -\int E\mathrm{d}S = -ES = -4\pi E r^2 \qquad \text{a} \qquad T = -4\pi\kappa M' = -4\pi\kappa \frac{4}{3}\pi r^3 \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} ,$$

kde M' je hmotnost koule o poloměru r. Pro velikost intenzity gravitačního pole potom dostaneme

$$E = \kappa \frac{M}{R^3} r \, .$$



Pro potenciál φ v okolí homogenní koule ($r > R$) platí tedy obdobně jako pro bod s hmotností M, umístěný ve středu koule, tj. $\varphi = -\kappa M / r$. Pro vnitřní bod koule ($r < R$) vypočteme potenciál jako

$$\varphi = -\int_0^r \mathbf{E} \mathrm{d}\mathbf{r} + C = \int_0^r E \mathrm{d}r + C = \int_0^r \kappa \frac{M}{R^3} r \, \mathrm{d}r + C = \kappa \frac{M}{2R^3} r^2 + C \, ,$$

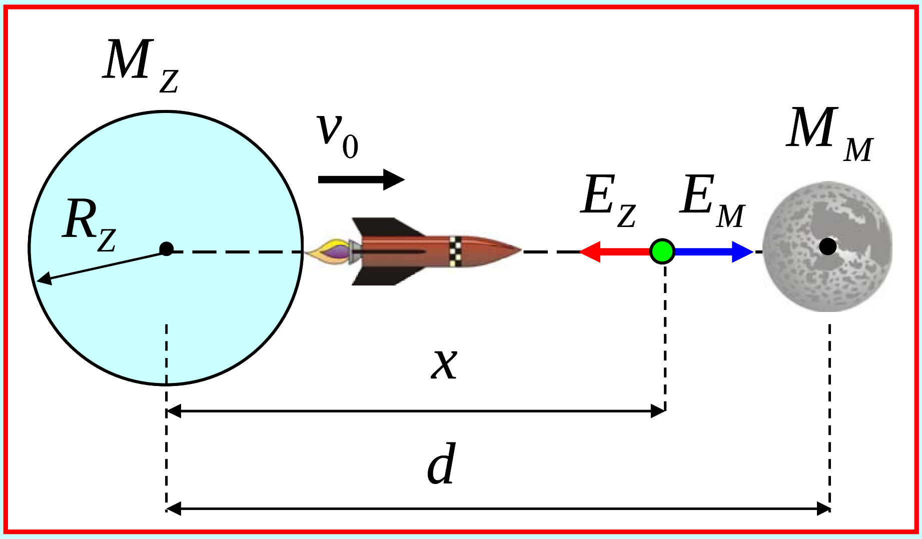
kde konstantu C určíme z podmínky spojitosti potenciálu na povrchu koule, tj.

$$\varphi(R) = -\kappa \frac{M}{R} \, , \qquad C = -\kappa \frac{M}{R} - \kappa \frac{M}{2R} = -\kappa \frac{3}{2} \frac{M}{R} \qquad \Rightarrow \qquad \varphi = \kappa \frac{M}{2} \left(\frac{r^2}{R^3} - \frac{3}{R} \right) .$$

20. Určete, jakou minimální rychlostí by bylo nutné vystřelit raketu z povrchu Země ve směru přímé spojnice Země-Měsíc, aby dopadla na povrch Měsíce. Vzdálenost Země-Měsíc $d \doteq 380 \cdot 10^6$ m a hmotnost Měsíce je rovna $M_M \doteq M_Z/81$, kde M_Z je hmotnost Země. Odpor atmosféry pro jednoduchost zanedbejte.

<u>**Řešení:**</u> Raketě je nutno udělit takovou rychlost (dodat kinetickou energii), aby se vymanila ze silového působení gravitačního pole Země. Budeme-li tedy uvažovat pouze se společným gravitačním polem Země a Měsíce, potom musíme udělit raketě takovou rychlost, aby dosáhla minimálně vzdálenosti x na spojnici Země-Měsíc, kde je intenzita společného gravitačního pole nulová, tj. $E_Z = E_M$

$$E_Z = \kappa \frac{M_Z}{x^2}, \qquad E_M = \kappa \frac{M_M}{(d-x)^2} = \kappa \frac{M_Z}{81(d-x)^2} \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{9}{10} d = 342 \cdot 10^6 \,\text{km}.$$



Dále podle zákona zachování mechanické energie můžeme psát pro raketu o hmotnosti m

$$\frac{1}{2} m v_0^2 - \kappa \frac{mM_Z}{R_Z} - \kappa \frac{mM_M}{d - R_Z} = -\kappa \frac{mM_Z}{x} - \kappa \frac{mM_M}{d-x},$$

kde na levé straně je součet kinetické a potenciální energie rakety na povrchu Země a na pravé straně celková energie v místě x (předpokládáme $v = 0$). Nyní již jednoduše vyjádříme rychlost v_0 ze vztahu

$$v_0 = \sqrt{2gR_Z \left(1 - \frac{R_Z}{x} + \frac{R_Z}{81(d - R_Z)} - \frac{R_Z}{81(d-x)}\right)} \doteq 11{,}09 \text{ km/s}.$$