Elastické deformace těles

15. Na ocelový drát délky L = 1,5 m a průměru d = 2,1 mm zavěsíme závaží o hmotnosti $m = 110$ kg, přičemž Youngův modul pružnosti oceli v tahu $E = 216$ GPa a mez pružnosti oceli $\sigma_P = 330$ MPa. Určete relativní prodloužení drátu ε a to, zda je či není překročena mez pružnosti.

Řešení:
Mezi poměrnou deformací ε a napětím σ platí při lineárně pružném chování Hookeův zákon, tj.

$$\sigma = E\varepsilon, \qquad \varepsilon = \frac{\Delta L}{L} = \frac{F}{ES}, \qquad S = \frac{\pi d^2}{4}, \qquad F = mg\,.$$

Z předchozích vztahů již snadno vyjádříme relativní prodloužení drátu ε a napětí v drátu σ jako

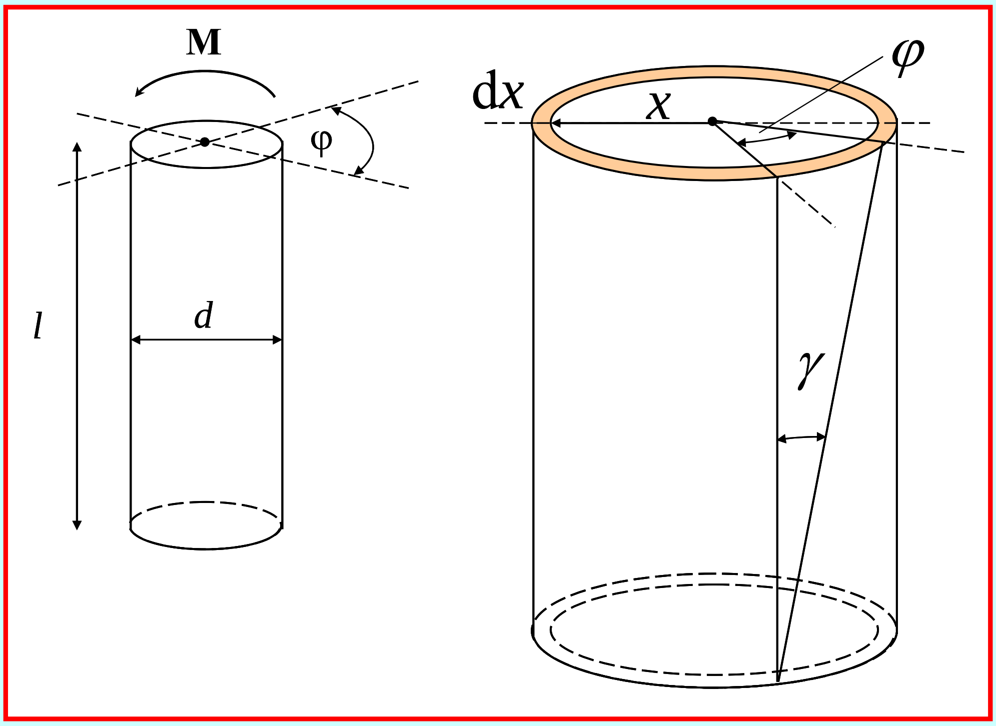
$$\varepsilon = \frac{\Delta L}{L} = \frac{4mg}{\pi d^2 E} = 0{,}14\,\%\,,$$

$$\sigma = \frac{F}{S} = \frac{4mg}{\pi d^2} = 312\ \text{MPa}\,, \qquad \sigma < \sigma_P\,.$$

16. Určete, o jaký úhel φ se zkroutí ocelová hřídel délky $l = 1\ \text{m}$ a průměru $d = 3\ \text{cm}$, jestliže je namáhána kroutícím momentem $M = 100\ \text{Nm}$ a jaké je maximální tečné napětí τ_{max} vznikající v průřezu. Modul pružnosti v tahu oceli $E = 210\ \text{GPa}$ a Poissonovo číslo $\mu = 0{,}3$.

Řešení: Na obrázku je znázorněna vyšetřovaná situace. Elementární trubice hřídele o poloměru x, tloušťce dx a délce l se zkroutí o úhel φ a pro poměrné posunutí γ platí

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{x\varphi}{l}.$$



Vzhledem k tomu, že $l >> x\varphi$, můžeme uvažovat s dostatečnou přesností $\operatorname{tg}\gamma \doteq \gamma$. Pro tečné napětí poté platí z Hookeova zákona $\tau = G\gamma$, kde G je modul pružnosti ve smyku, jenž vypočteme ze vztahu

$$G = \frac{E}{2(\mu + 1)} = 80{,}77\ \text{GPa}.$$

Tečné napětí je dáno poměrem tečné síly dF k ploše mezikruží $\mathrm{d}S = 2\pi x\,\mathrm{d}x$, tj.

$$\tau = \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}S} = G\frac{x\varphi}{l}$$

a pro velikost kroutícího momentu M můžeme vypočítat

$$M = \int x \,\mathrm{d}F = \int_0^{d/2} \frac{G\varphi}{l} x^2 \,\mathrm{d}S = \frac{G\varphi}{l} I_p ,$$

kde I_p je polární moment setrvačnosti průřezu. Pro kruhový průřez můžeme vypočítat

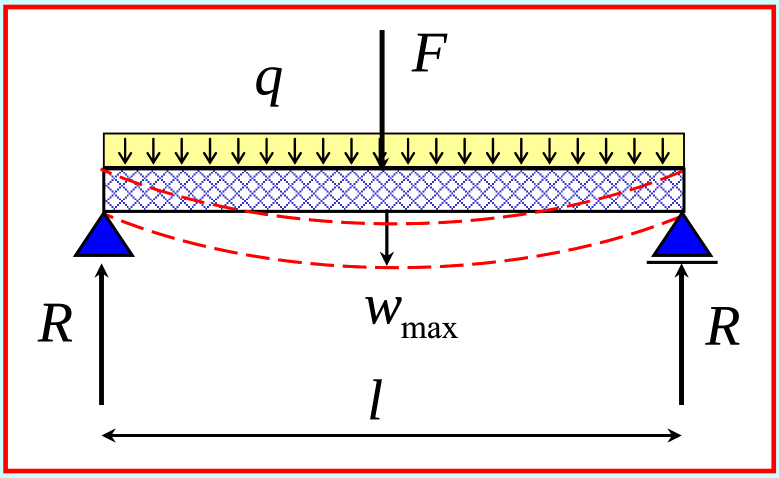
$$I_p = \int_0^{d/2} x^2 \,\mathrm{d}S = 2\pi \int_0^{d/2} x^3 \,\mathrm{d}x = \frac{\pi d^4}{8} .$$

Pro úhel zkroucení hřídele tedy dostáváme $\varphi = \dfrac{8Ml}{\pi G d^4} = 13'23''$. Vzhledem k symetrii průřezu hřídele bude vznikat maximální tečné napětí na okraji, tj. pro $x = d/2$

$$\tau_{\max} = G \frac{\varphi d}{2l} = \frac{4M}{\pi d^3} = 4{,}72 \text{ MPa} .$$

17. Vypočtěte průhyb lávky *w* při zatížení osobou o hmotnosti $m = 80$ kg uprostřed jejího rozpětí. Lávka je tvořena dřevěným prknem o šířce $a = 40$ cm a tloušťce $b = 5$ cm, které je ve vzdálenosti $l = 5$ m podepřeno dvěma pevnými podporami. Dále určete maximální možné zatížení lávky F_{max}, jestliže maximální dovolené namáhání v průřezu $\sigma_d = 15$ MPa. Modul pružnosti dřeva ve směru namáhání $E = 15$ GPa a hustota dřeva $\rho = 850\ \mathrm{kg/m^3}$.

Řešení: Lávka se bude chovat jako prostý nosník zatížený vlastní vahou (spojité zatížení $q = ab\rho g \doteq 167$ N/m) a osamělou silou $F = mg = 785$ N (tíha osoby) uprostřed rozpětí.

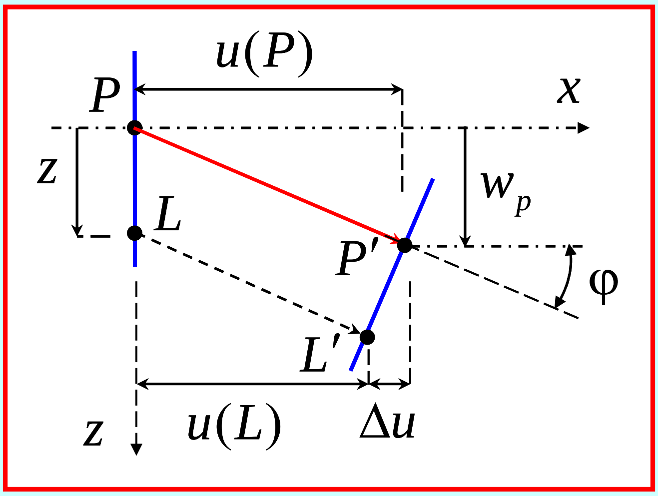


Budeme sledovat deformaci nosníku vzhledem k tzv. neutrální vrstvě, která rozděluje nosník na tlačenou a taženou část (tj. není namáhána a deformována při silovém působení na nosník). Příčný průřez nosníku tato vrstva protíná v tzv. neutrální ose. Sledujme tedy, jak se při deformaci posune nějaký bod P v neutrální vrstvě resp. jiný bod L ve směru *x* délky nosníku (body P a L leží v jednom příčném průřezu nosníku a jsou od sebe vzdáleny *z*). Svislá posunutí budeme označovat *w*, vodorovná *u* a pootočení průřezu φ. Budeme-li předpokládat, že průřezy i po deformaci zůstávají rovinné a deformace nosníku jsou malé, potom pro posunutí bodu L platí

$$u(L) = u(P) - \Delta u = u(P) - z\,\mathrm{tg}\,\varphi \approx u(P) - z\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x},$$

Relativní prodloužení ε libovolné vrstvy, která je vzdálena *z* od neutrální osy průřezu bude

$$\varepsilon = \frac{\mathrm{d}u(L)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}u(P)}{\mathrm{d}x} - z\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2}.$$

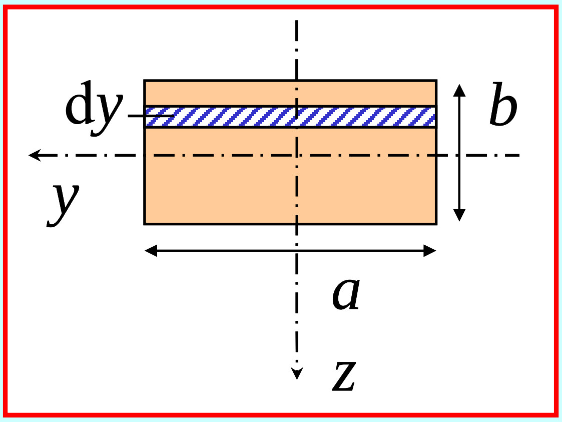


Při ohybu nepůsobí v průřezu normálová síla a tudíž body v neutrální vrstvě při deformaci ve směru *x* (natočení průřezů) nemění svoji polohu, tj. $\mathrm{d}u(P)/\mathrm{d}x = 0$. Normálové napětí σ v dané vrstvě průřezu určíme podle Hookeova zákona $\sigma = E\varepsilon$. Elementární síla d*F*, působící na element průřezu d*S*, je tedy rovna $\mathrm{d}F = \sigma\,\mathrm{d}S$. Výslednice těchto sil v rovině průřezu se musí rovnat nule

$$F = -E\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2}\iint_S z\,\mathrm{d}S = -E\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2}S_y = 0,$$

tj. statický moment S_y musí být roven nule, což platí pro těžišťovou osu y (tj. neutrální osa prochází těžištěm). Elementární síla dF vyvolá v průřezu moment síly $\mathrm{d}M_y = z\,\mathrm{d}F$ a tedy celkový moment M_y vzhledem k neutrální ose průřezu y je poté

$$M_y = -E\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2}\int z^2 \mathrm{d}S = -EI_y\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2},$$



kde I_y je moment setrvačnosti průřezu vzhledem k neutrální ose y průřezu. Předchozí diferenciální rovnice nám určuje svislý průhyb nosníku při čistém ohybu (tzv. rovnice ohybové čáry). V případě naší lávky nejprve určíme reakce R v podporách ze silové podmínky rovnováhy $2R = F + ql \quad \Rightarrow$ $R = (F + ql)/2$. Dále vypočteme ohybový moment $M_y(x)$ v obecném místě x průřezu nosníku, tj.

$$x \in <0, l/2> \quad \Rightarrow \quad M_y(x) = Rx - qx^2/2,$$

$$x \in <l/2, l> \quad \Rightarrow \quad M_y(x) = Rx - qx^2/2 - F(x - l/2).$$

Maximální moment v průřezu bude v místě, kde $\mathrm{d}M/\mathrm{d}x = 0$ (tj. $x = l/2$) a bude mít velikost

$$M_{\max} = \frac{Fl}{4} + \frac{ql^2}{8} = 1293\ \mathrm{Nm}.$$

Maximální napětí v tahu a tlaku budou právě v místě maximálního momentu v krajních vláknech průřezu, tj.

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{I_y} y_{\max} = \frac{M_{\max}}{I_y}\frac{b}{2} = \frac{6M_{\max}}{ab^2} = 21{,}6\ \mathrm{MPa} < \sigma_d,$$

kde pro moment setrvačnosti obdélníkového průřezu vzhledem k neutrální ose y vypočteme

$$I_y = \int z^2 \mathrm{d}S = a\int_{-b/2}^{b/2} z^2 \mathrm{d}y = a\left[\frac{z^3}{3}\right]_{-b/2}^{b/2} = \frac{1}{12}ab^3.$$

Pro maximální zatěžovací sílu $F_{\max}$ poté odvodíme z předchozího vztahu pro napětí

$$F_{\max} = \frac{4}{l}\left(\frac{\sigma_d}{6}ab^2 - \frac{ql^2}{8}\right) = 1583\ \mathrm{N}.$$

Nyní určíme průhyb nosníku při daném zatížení. Vzhledem k symetrii zatížení a uložení nosníku můžeme určit průhyb pouze pro jednu jeho polovinu (průhyb $y(x)$ v druhé polovině nosníku určíme pouze záměnou l-x za x ve výsledném vztahu pro průhyb). Průhyb y bude spojitá funkce, pro kterou bude platit $x = l/2 \Rightarrow w = w_{\max}$, $\mathrm{d}w/\mathrm{d}x = 0$ a $x = 0$ resp. $x = l \Rightarrow w = 0$. Dosazením do diferenciální rovnice pro průhyb dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{M_y}{EI_y} = \frac{1}{EI_y}\left(\frac{qx^2}{2} - Rx\right)$$

a její dvojnásobnou integrací podle x vypočteme

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{EI_y}\left(\frac{qx^3}{6} - R\frac{x^2}{2}\right) + C_1 \qquad \text{a} \qquad w = \frac{1}{EI_y}\left(\frac{qx^4}{24} - R\frac{x^3}{6}\right) + C_1 x + C_2 .$$

Integrační konstanty zjistíme dosazením okrajových podmínek a tedy průhyb nosníku

$$w = \frac{1}{24EI_y}\left(qx^4 - 4Rx^3\right) + \frac{1}{48EI_y}\left(6Rl^2 - ql^3\right)x$$

Maximální hodnotu průhybu $w_{\max}$ obdržíme dosazením $x = l/2$

$$w_{\max} = \frac{1}{48EI_y}\left(2Rl^3 - \frac{3ql^4}{8}\right) = \frac{1}{48EI_y}\left(Fl^3 + \frac{5ql^4}{8}\right) = \frac{1}{4Eab^3}\left(Fl^3 + \frac{5ql^4}{8}\right) \doteq 5{,}4\ \mathrm{cm}.$$