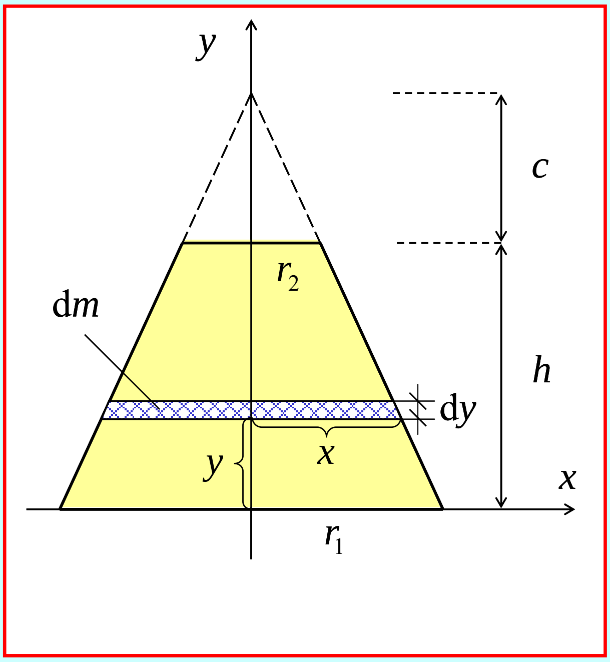
Mechanika tuhého tělesa

12. Určete těžiště homogenního komolého kužele o výšce $h = 80\text{ cm}$ a poloměru spodní resp. horní podstavy $r_1 = 40\text{ cm}$ resp. $r_2 = 10\text{ cm}$.

Řešení:

Pro souřadnici těžiště y_T platí

$$y_T = \frac{S_x}{M} = \frac{\int y\,\mathrm{d}m}{\int \mathrm{d}m} = \frac{\int y\rho\,\mathrm{d}V}{\int \rho\,\mathrm{d}V} = \frac{\int y\,\mathrm{d}V}{\int \mathrm{d}V},$$



kde S_x je statický moment k ose x a M je hmotnost kužele. Vyjádříme-li si elementární objem vrstvičky kužele o tloušťce dx a souřadnici y, potom $\mathrm{d}V = \pi x^2 \mathrm{d}x$. Pro souřadnici x dále platí

$$\frac{r_1}{h+c} = \frac{r_2}{c} \quad \Rightarrow \quad c = \frac{r_2 h}{r_1 - r_2},$$

$$\frac{x}{h+c-y} = \frac{r_2}{c} \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{r_2^2}{c^2}(h+c-y)^2.$$

Dosazením vztahu pro x^2 získáme

$$\int y\,\mathrm{d}V = \frac{\pi r_2^2}{c^2}\int_0^h y(h+c-y)^2\,\mathrm{d}y = \frac{\pi r_2^2}{c^2}\left[\frac{(c+h)^2}{2}y^2 - \frac{2(c+h)}{3}y^3 + \frac{y^4}{4}\right]_0^h = \frac{\pi h^2}{12}(r_1^2 + 2r_1 r_2 + 3r_2^2),$$

$$\int \mathrm{d}V = \frac{\pi r_2^2}{c^2}\int_0^h y(h+c-y)^2\,\mathrm{d}y = \frac{\pi r_2^2}{c^2}\left[(c+h)^2 y - (c+h)y^2 + \frac{y^3}{3}\right]_0^h = \frac{\pi h}{3}(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2).$$

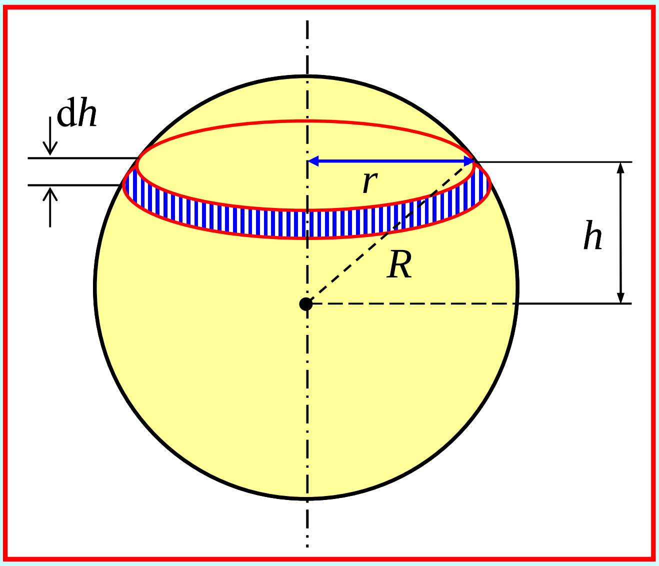
Pro souřadnici těžiště tedy dostáváme

$$y_T = \frac{h}{4}\frac{(r_1^2 + 2r_1 r_2 + 3r_2^2)}{(r_1^2 + r_1 r_2 + r_2^2)} = 25{,}7\text{ cm}.$$

13. Vypočtěte moment setrvačnosti J duté homogenní koule vzhledem k ose jdoucí jejím těžištěm. Koule má vnitřní poloměr R_1, vnější poloměr R_2, hmotnost m a hustotu ρ.

Řešení:

Nejdříve určíme moment setrvačnosti J_K plné homogenní koule o poloměru R a hmotnosti m vůči ose jdoucí jejím těžištěm (viz.obr). Pro osově symetrický válcový element dm koule s poloměrem r a tloušťkou dh, který je vzdálen h od středu koule, platí



$$\mathrm{d}J_K = \frac{\mathrm{d}m}{2} r^2 = \frac{\rho\pi r^2 \mathrm{d}h}{2} r^2 = \frac{\rho\pi r^4}{2}\mathrm{d}h,$$

$$r^2 = R^2 - h^2.$$

Integrací přes celé těleso získáme moment setrvačnosti plné koule

$$J_K = \int \mathrm{d}J_K = 2\int_0^R \frac{\rho\pi}{2}(R^2-h^2)^2\,\mathrm{d}h = \rho\pi\frac{8}{15}R^5 = \frac{2}{5}\left(\rho\frac{4}{3}\pi R^3\right)R^2 = \frac{2}{5}mR^2.$$

Nyní již můžeme určit moment setrvačnosti duté koule. Platí

$$J = \frac{2}{5}m_1R_1^2 - \frac{2}{5}m_2R_2^2,$$

kde m_1 je hmotnost koule o poloměru R_1 a m_2 je hmotnost koule o poloměru R_2. Pro hmotnost m duté koule a následně pro moment setrvačnosti duté koule platí

$$m = m_1 - m_2 = \frac{4}{3}\pi\rho(R_1^3 - R_2^3) \qquad \Rightarrow \qquad J = \frac{2}{5}\frac{4}{3}\pi\rho(R_1^5 - R_2^5) = \frac{2}{5}m\frac{(R_1^5 - R_2^5)}{(R_1^3 - R_2^3)}.$$

14. Těleso o hmotnosti $m_1 = 0{,}25\ \mathrm{kg}$ je umístěno na vodorovné podložce a je vláknem připevněno k volně visícímu tělesu o hmotnosti $m_2 = 0{,}2\ \mathrm{kg}$ přes pevnou kladku (plný homogenní disk) o hmotnosti $m = 0{,}15\ \mathrm{kg}$. Koeficient smykového tření prvního tělesa o podložku je $\mu = 0{,}2$. Určete zrychlení a pohybu obou těles a tahové síly T_1 a T_2 ve vlákně, přičemž zanedbejte hmotnost vlákna a tření při otáčení kola.

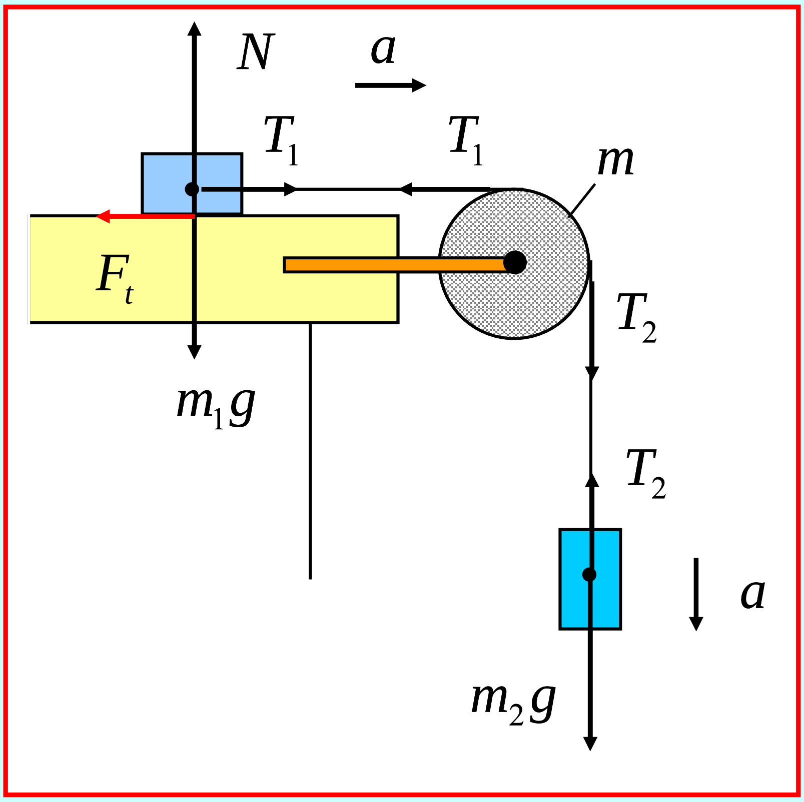
Řešení:

Rovnice popisující pohyb obou těles a kladky můžeme zapsat jako

$$m_1 a = T_1 - F_t\,,$$

$$m_2 a = m_2 g - T_2\,,$$

$$(T_2 - T_1)R = J\varepsilon\,,$$



kde pro třecí sílu F_t, moment setrvačnosti kladky J a úhlové zrychlení ε kladky platí

$$F_t = \mu m_1 g\,,$$

$$J = \frac{mR^2}{2}\,,$$

$$\varepsilon = a/R\,.$$

Dosazením předchozích vztahů do pohybových rovnic získáme

$$T_1 = m_1(\mu g + a)\,,$$

$$T_2 = m_2(g - a)\,,$$

$$2(T_2 - T_1) = ma\,.$$

Vyřešením předchozích tří rovnic obdržíme

$$a = \frac{2g(m_2 - \mu m_1)}{2m_1 + 2m_2 + m} = 2{,}8\ \mathrm{m/s^2}\,, \qquad T_1 = 1{,}19\ \mathrm{N}\,, \qquad T_2 = 1{,}4\ \mathrm{N}\,.$$