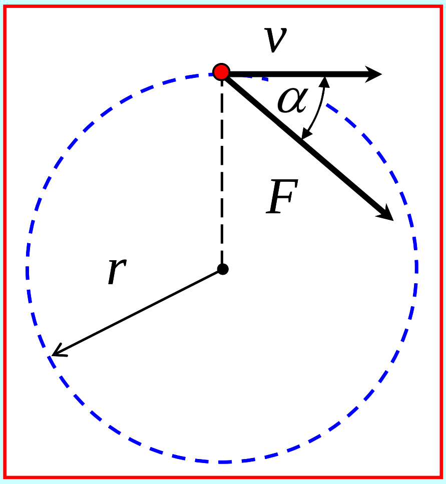
Dynamika hmotných bodů

3. Hmotný bod o hmotnosti $m = 10\ \mathrm{kg}$ se pohybuje po kružnici o poloměru $r = 2\ \mathrm{m}$, přičemž jeho dráha závisí na čase podle vztahu $s = kt^3$, kde $k = 0{,}005\ \mathrm{m/s^3}$. Určete velikost výsledné síly F působící na hmotný bod, úhel α, který svírá vektor síly s vektorem rychlosti, úhlovou rychlost ω a úhlové zrychlení ε v čase $t = 10\ \mathrm{s}$.

Řešení: Nejdříve určíme rychlost v, normálové, tečné a celkové zrychlení hmotného bodu jako

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = 3kt^2, \quad a_n = \frac{v^2}{r} = \frac{9k^2t^4}{r}, \qquad a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = 6kt,$$

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} = 6kt\sqrt{1 + \frac{81k^2t^6}{36r^2}} = 1{,}16\ \mathrm{m/s^2}.$$



Pro výslednou sílu, úhlovou rychlost a úhlové zrychlení hmotného bodu poté platí

$$F = ma = 11{,}6\ \mathrm{N}, \qquad \omega = \frac{v}{r} = \frac{3kt^2}{r} = 0{,}75\ \mathrm{s^{-1}},$$

$$\varepsilon = \frac{a_t}{r} = \frac{6kt}{r} = 0{,}15\ \mathrm{s^{-2}}.$$

Úhel, který svírá směr výsledné síly se směrem rychlosti potom vypočteme ze vztahu

$$\cos\alpha = \frac{a_t}{a} = \frac{6r}{\sqrt{36r^2 + 81k^2t^6}} = 0{,}258 \qquad \Rightarrow \qquad \alpha \doteq 75^\circ 03'.$$

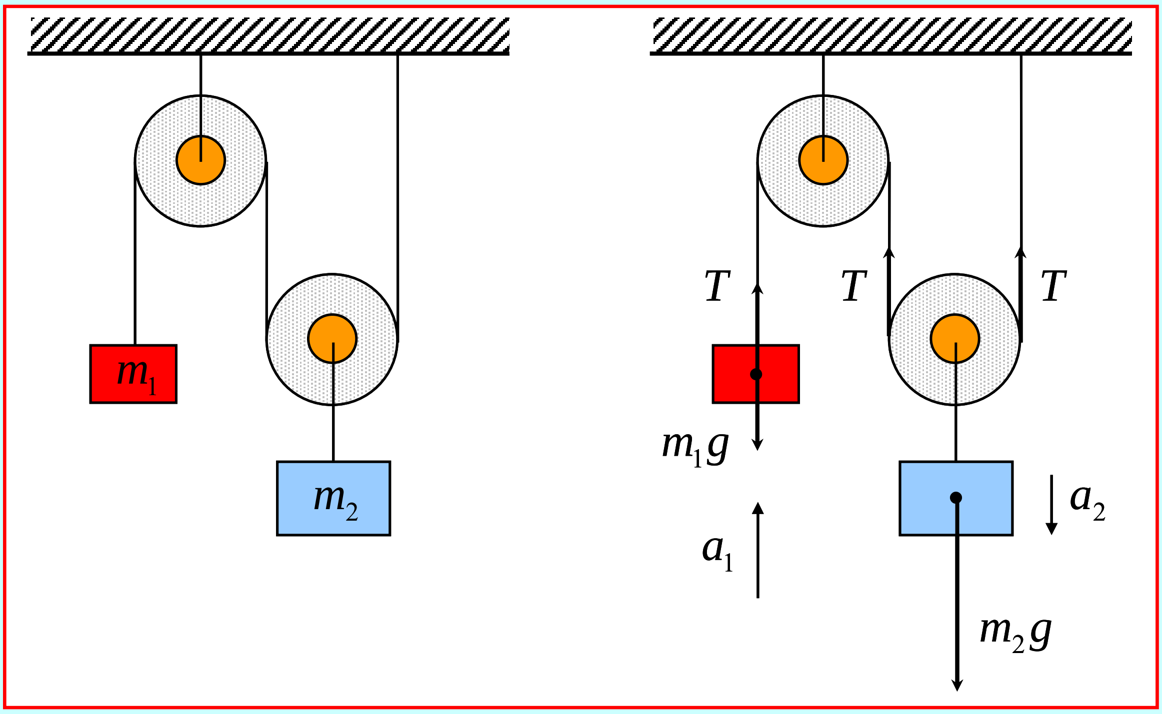
4. Na kladkostroji, který se skládá ze dvou kladek (viz.obr.), visí dvě závaží o hmotnostech $m_1 = 200\ \mathrm{g}$ a $m_2 = 500\ \mathrm{g}$. Určete tahovou sílu T působící v laně a zrychlení a_1, a_2 obou závaží. Při výpočtu neuvažujte tření lana o kladku a hmotnost lana a kladek.

Řešení: Pro velikost zrychlení jednotlivých závaží při pohybu platí vzájemný vztah $a_1 = 2a_2$. Napišme si nyní pohybové rovnice pro obě závaží

$$m_1 a_1 = 2m_1 a_2 = T - m_1 g\ ,\ m_2 a_2 = m_2 g - 2T\ .$$

Podělením rovnic získáme

$$\frac{m_2}{2m_1} = \frac{m_2 g - 2T}{T - m_1 g}\ .$$



Úpravou této rovnice můžeme vyjádřit sílu T jako

$$T = \frac{3m_1 m_2 g}{m_2 + 4m_1} = 2{,}26\ \mathrm{N}.$$

Dosazením T do pohybových rovnic určíme zrychlení jednotlivých závaží

$$a_1 = \frac{T - m_1 g}{m_1} = \frac{2(m_2 - 2m_1)g}{m_2 + 4m_1} = 1{,}5\ \mathrm{m/s^2}\ , \qquad a_2 = \frac{m_2 g - 2T}{m_2} = \frac{(m_2 - 2m_1)g}{m_2 + 4m_1} = 0{,}75\ \mathrm{m/s^2}.$$

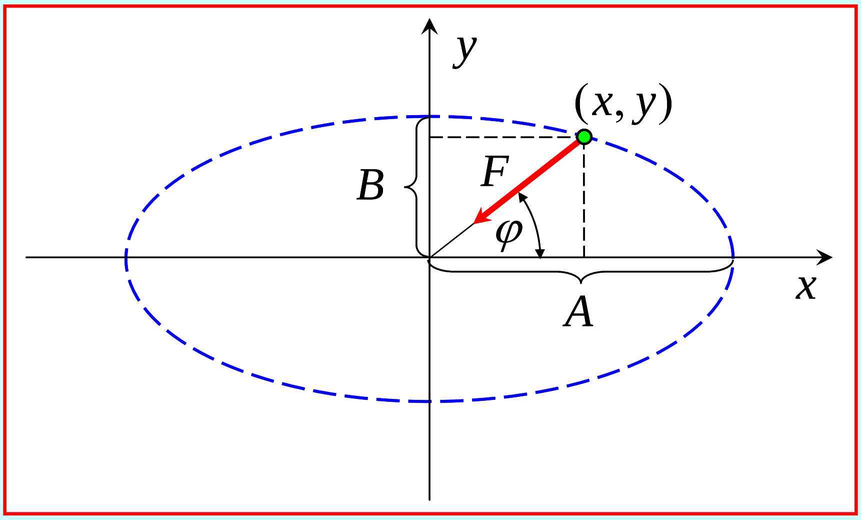
5. Těleso o hmotnosti m se pohybuje v rovině xy podle rovnic $x = A\cos\omega t$, $y = B\sin\omega t$, kde A,B a ω jsou kladné konstanty. Určete velikost síly F působící na těleso a po jaké křivce se bude toto těleso pohybovat.

<u>Řešení</u>: Pro polohový vektor **r**, vektor rychlosti **v** a vektor zrychlení **a** platí

$$\mathbf{r} = A\cos\omega t\,\mathbf{i} + B\sin\omega t\,\mathbf{j}\,,$$

$$\mathbf{v} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = -A\omega\sin\omega t\,\mathbf{i} + B\omega\cos\omega t\,\mathbf{j}\,,$$

$$\mathbf{a} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = -A\omega^2\cos\omega t\,\mathbf{i} - B\omega^2\sin\omega t\,\mathbf{j}\,.$$



Velikost zrychlení a je rovna

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{(-A\omega^2\cos\omega t)^2 + (-B\omega^2\sin\omega t)^2} = \omega^2\sqrt{x^2 + y^2}$$

a pro působící sílu dostáváme $F = ma = m\omega^2\sqrt{x^2 + y^2}$. Jelikož obecně platí

$$\left(\frac{x}{A}\right)^2 + \left(\frac{y}{B}\right)^2 = \cos^2\omega t + \sin^2\omega t = 1\,,$$

tak se těleso se v případě $A \neq B$ pohybuje po elipse (viz.obr.)

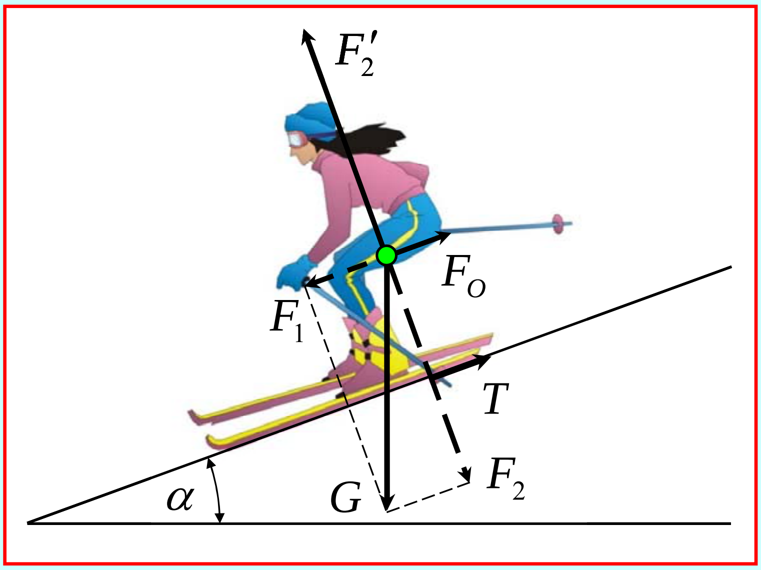
$$x = A\cos\varphi\,,\quad y = B\sin\varphi\,,\quad \mathrm{tg}\,\varphi = \frac{B}{A}\mathrm{tg}\,\omega t\,.$$

.

6. Určete, jaké maximální rychlosti $v_{\max}$ může dosáhnout lyžař o hmotnosti $m = 100\ \text{kg}$ na svahu o sklonu $\alpha = 30^\circ$, jestliže se pohybuje přímočaře dolů ze svahu, koeficient smykového tření lyží na sněhu $\mu = 0{,}1$ a odpor vzduchu je úměrný čtverci rychlosti, tj. $F_o = kv^2$, kde koeficient $k = 0{,}5\ \text{Nm}^{-2}\text{s}^{-2}$. Vypočtěte, jakou dráhu s ujede lyžař za dobu $t = 20\ \text{s}$ a jakou bude mít rychlost v.

<u>Řešení</u>: Lyžař bude postupně zvyšovat svojí rychlost až do jisté mezní rychlosti, která odpovídá stavu, kdy bude výsledná působící síla F nulová, tj.

$$F = F_1 - F_o - T = 0\,, \quad F_1 = mg\sin\alpha\,, \quad F_o = kv^2\,, \quad T = \mu F_2 = \mu mg\cos\alpha\,.$$



Dosazením a jednoduchou úpravou obdržíme pro mezní rychlost

$$v_{\max} = \sqrt{\frac{mg}{k}(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)} = 28{,}5\ \text{m/s} = 102{,}5\ \text{km/h}\,.$$

Napíšeme-li si nyní rovnici pro pohyb lyžaře na svahu

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = F_1 - F_o - T \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) - \frac{k}{m}v^2\,.$$

Abychom mohli co nejjednodušeji řešit tuto diferenciální rovnici, přepíšeme si ji na tvar

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = A(1 - B^2v^2)\,, \qquad A = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)\,, \qquad B = \sqrt{\frac{k}{mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}}\,.$$

Nyní řešíme předchozí rovnici metodou separace proměnných s použitím počátečních podmínek $t = 0 \Rightarrow v = 0 \Rightarrow s = 0$, tj.

$$A\int_0^t \mathrm{d}t = \int_0^v \frac{\mathrm{d}v}{(1-B^2v^2)} = \frac{1}{2}\int_0^v \frac{\mathrm{d}v}{(1+Bv)} + \frac{1}{2}\int_0^v \frac{\mathrm{d}v}{(1-Bv)} = \frac{1}{2B}\ln\left|\frac{(1+Bv)}{(1-Bv)}\right| = \frac{1}{2B}\ln\frac{(1+Bv)}{(1-Bv)}\,.$$

Vyjádříme-li nyní rychlost lyžaře v čase t, dostaneme

$$\frac{(1+Bv)}{(1-Bv)} = e^{2ABt} \qquad \Rightarrow \qquad v = \frac{1}{B}\frac{e^{2ABt}-1}{e^{2ABt}+1} = \frac{1}{B}\frac{e^{ABt}-e^{-ABt}}{e^{ABt}+e^{-ABt}} = \frac{1}{B}\,\mathrm{tgh}(ABt) = 25{,}36\ \mathrm{m/s}\,.$$

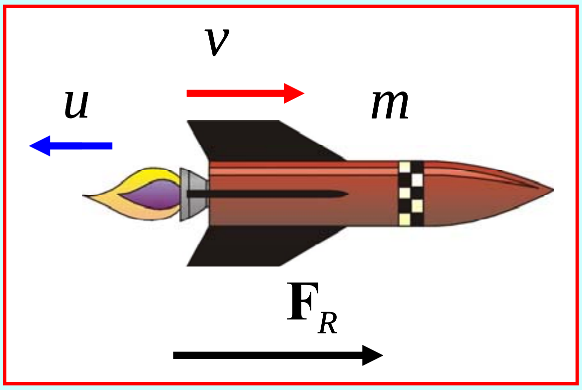
Pro dráhu získáme integrací rychlosti podle času vztah

$$s = \int_0^t v\,\mathrm{d}t = \frac{1}{AB^2}\left[\ln(e^{ABt}+e^{-ABt})\right]_0^t = \frac{1}{AB^2}\ln\frac{e^{ABt}+e^{-ABt}}{2} = \frac{1}{B}\ln\left[\cosh(ABt)\right] \doteq 157{,}4\ \mathrm{m}\,.$$

7. Raketa s počáteční hmotností $m_0 = 1{,}5$ kg se začala z klidu pohybovat ve svislém směru. Výtoková rychlost spalovaných plynů je $v_R = 600$ m/s, rychlost spalování paliva je $\mu = 0{,}3$ kg/s. Vypočtěte, jaké maximální rychlosti v raketa dosáhne a do jaké maximální výšky $h_{\max}$ vyletí, jestliže raketu vystřelíme svisle vzhůru v homogenním tíhovém poli a hmota paliva $m_p = 1{,}3$ kg. Odpor prostředí zanedbáváme.

Řešení: Raketu budeme považovat za hmotný bod s proměnnou hmotností. Vyjádříme-li si hybnost rakety v čase t a t + dt, potom dostaneme

$$\mathbf{p}_t = (m + \mathrm{d}m^*)\mathbf{v} = (m - \mathrm{d}m)\mathbf{v}\,, \qquad \mathbf{p}_{t+\mathrm{d}t} = m(\mathbf{v} + \mathrm{d}\mathbf{v}) + \mathbf{u}\mathrm{d}m^* = m(\mathbf{v} + \mathrm{d}\mathbf{v}) - \mathbf{u}\mathrm{d}m\,,$$



kde $\mathrm{d}m^*$ je hmota plynů, jež opouštějí raketu za čas dt výstupní tryskou, $\mathrm{d}m = -\mathrm{d}m^*$ je úbytek hmotnosti rakety za čas dt, **v** resp. **u** jsou rychlosti rakety resp. oddělované hmoty (spalin) vůči vztažné inerciální soustavě.

Dosadíme-li nyní změnu hybnosti do Newtonova pohybového zákona, potom obdržíme pohybovou rovnici

$$F = \frac{\mathrm{d}\mathbf{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathbf{p}_{t+\mathrm{d}t} - \mathbf{p}_t}{\mathrm{d}t} = m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\mathbf{v}_R\,, \qquad \mathbf{F}_R = \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t}\mathbf{v}_R\,,$$

kde $\mathbf{v}_R$ je relativní rychlost odlučované hmoty vůči raketě (výtoková rychlost spalovaných plynů, která má opačný směr nežli rychlost v rakety) a $\mathbf{F}_R$ je tzv. reaktivní síla. Pro náš případ pohybu rakety platí následující pohybová rovnice

$$ma = m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = F_R - G\,, \qquad m = m_0 - \mu t\,, \qquad F_R = -v_R\frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = \mu v_R\,, \qquad G = mg\,.$$

Dosazením získáme diferenciální rovnici 1.řádu

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mu v_R}{m_0 - \mu t} - g\,.$$

Dobu, za kterou raketa spotřebuje všechno palivo, vypočteme ze vztahu $t = m_p/\mu$. Řešením pohybové rovnice obdržíme pro rychlost v a dráhu s v čase t ($m' = m_0 - m_p$)

$$v_{\max} = v_R \ln \frac{m_0}{m_0 - \mu t} - gt = v_R \ln \frac{m_0}{m_0 - m_p} - g\frac{m_p}{\mu} = v_R \ln \frac{m_0}{m'} - g\frac{m_p}{\mu} = 1166 \text{ m/s}.$$

$$s = \frac{v_R}{\mu}(m_0 - \mu t)\left[\frac{m_0}{m_0 - \mu t} - \ln \frac{m_0}{m_0 - \mu t} - 1\right] - \frac{1}{2}gt^2 = \frac{v_R m'}{\mu}\left[\frac{m_0}{m'} - \ln \frac{m_0}{m'} - 1\right] - \frac{g m_p^2}{2\mu^2} \doteq 1702 \text{ m}.$$

Po vyhoření veškerého paliva se bude raketa rovnoměrně zpomalovat a pro dráhu x, kterou ještě uletí než se zastaví, tedy platí podle zákona zachování energie

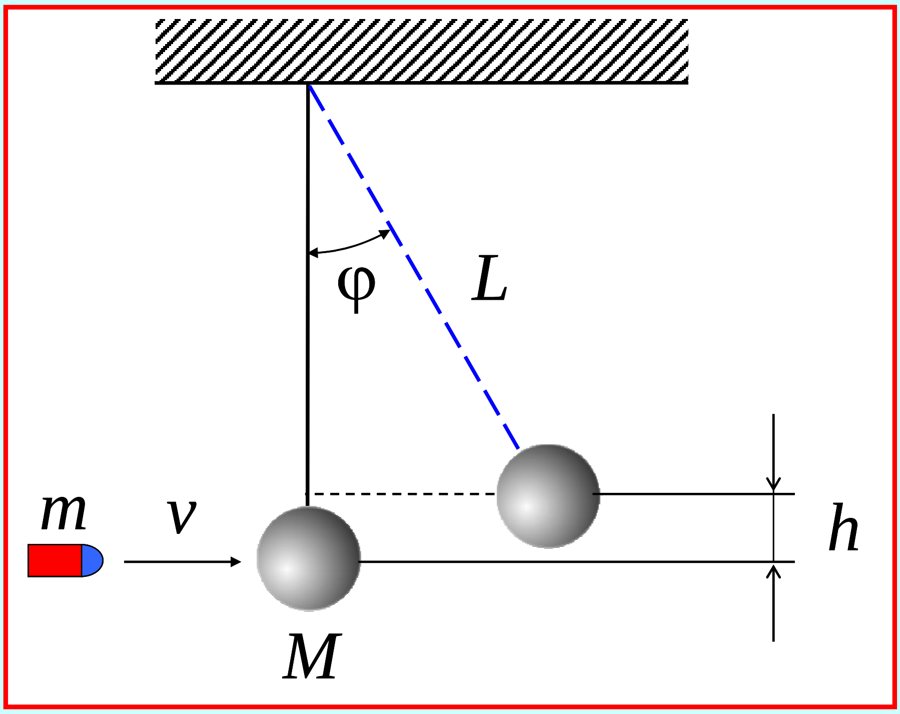
$$\frac{1}{2}(m_0 - m_p)v_{\max}^2 = (m_0 - m_p)gx \qquad \Rightarrow \qquad x = \frac{v_{\max}^2}{2g} = 69294 \text{ m}.$$

Pro výšku $h_{\max}$ nad povrchem Země, kam raketa doletí, tedy dostaneme $h_{\max} \doteq 71 \text{ km}$.

8. Kulka o hmotnosti $m = 15\ \text{g}$ letí vodorovně rychlostí $v = 200\ \text{m/s}$ a narazí do balistického kyvadla o délce L = 1 m a hmotnosti $M = 1{,}5\ \text{kg}$ a uvázne v něm. Určete úhel φ, o který se odchýlí závěs kyvadla od svislého směru.

Řešení: Pro rychlost *u* kyvadla těsně po nárazu získáme ze zákona zachování hybnosti

$$mv = (m+M)u\,, \qquad u = \frac{m}{m+M}v\,.$$



Maximální výšku *h*, do které vystoupí kyvadlo můžeme určit ze zákona zachování energie

$$\frac{(m+M)u^2}{2} = (m+M)gh\,, \qquad h = \frac{u^2}{2g} = \frac{(mv)^2}{2g(m+M)^2}\,.$$

Pro úhel φ tedy dostaneme

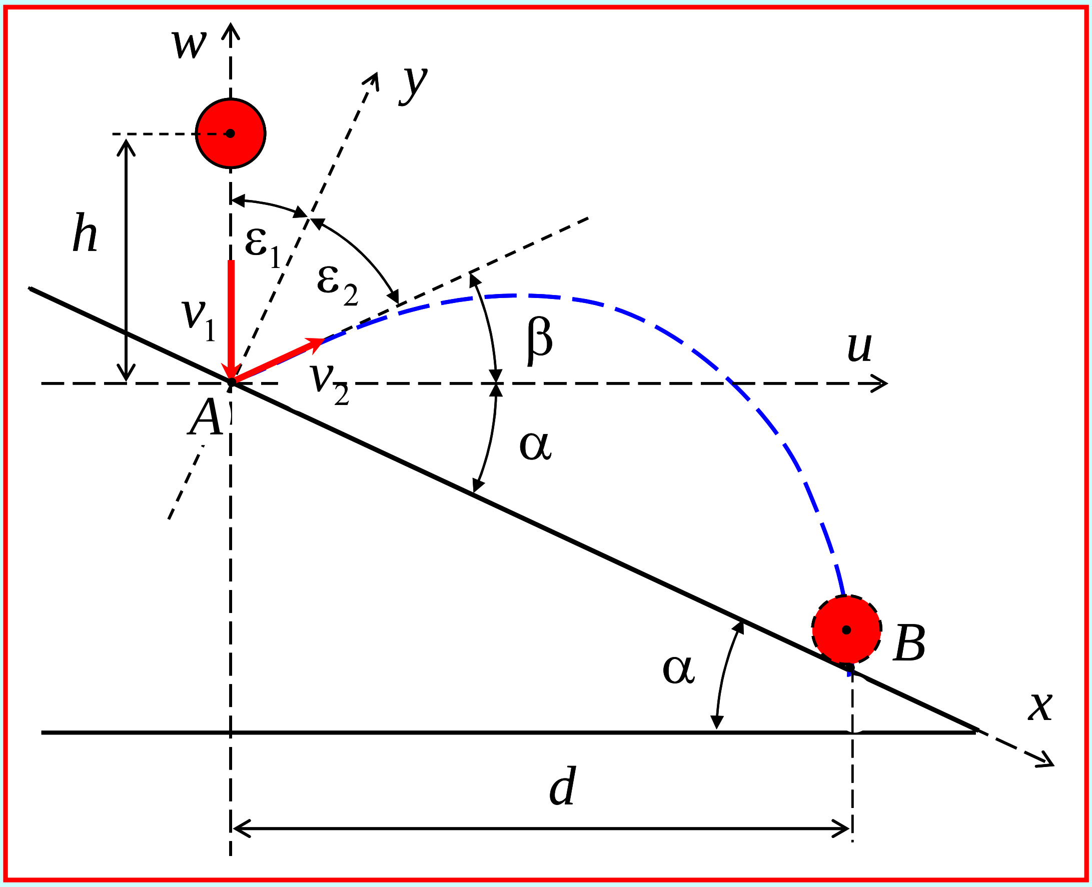
$$\cos\varphi = \frac{L-h}{L} = 1-\frac{h}{L}\,, \qquad \varphi = \arccos\left[1-\frac{(mv)^2}{2gL(m+M)^2}\right] = 36{,}9^\circ.$$

9. Hladký polopružný míček pustíme na hladkou nakloněnou rovinu se sklonem $\alpha = 30^\circ$ z výšky $h = 1\ \mathrm{m}$. Určete, v jaké vodorovné vzdálenosti od místa prvního dopadu opět dopadne míček na nakloněnou rovinu. Předpokládejte, že se jedná o nedokonale pružný ráz s koeficientem rezistence (vzpruživosti) $k = 0{,}8$. Odpor prostředí zanedbejte.

Řešení: Jedná se o nedokonale pružný šikmý ráz koule o desku. Vzhledem k tomu, že povrchy jsou dokonale hladké, nevzniknou mezi koulí a deskou při nárazu tečné deformace, a tedy tečná složka rychlosti se nezmění, tj. $v_{1x} = v_{2x}$, zatímco kolmá složka bude $v_{2y} = k\,v_{1y}$. Z uvedeného obrázku je zřejmé, že pro úhel dopadu míčku platí $\varepsilon_1 = \alpha$. Úhel odrazu míčku ε_2 určíme z následujících vztahů

$$\mathrm{tg}\,\varepsilon_1 = \frac{v_{1x}}{v_{1y}},$$

$$\mathrm{tg}\,\varepsilon_2 = \frac{v_{2x}}{v_{2y}} = \frac{v_{1x}}{k v_{1y}} = \frac{1}{k}\mathrm{tg}\,\varepsilon_1 = \frac{1}{\sqrt{3}k} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_2 \doteq 35^\circ 49'.$$



Míček dopadá na nakloněnou rovinu rychlostí $v_1 = \sqrt{2gh}$, což plyne ze zákona zachování mechanické energie, a po dopadu se odrazí v úhlu β od vodorovné roviny, procházející bodem dopadu A, kde

$$\beta = \pi/2 - \alpha - \varepsilon_2 = 24^\circ 11'.$$

Dále již můžeme vyšetřovat problém jako šikmý vrh pod úhlem β rychlostí

$$v_2 = \sqrt{v_{2x}^2 + v_{2y}^2} = \sqrt{v_1^2 \sin^2 \varepsilon_1 + k^2 v_1^2 \cos^2 \varepsilon_1} = v_1 \sqrt{\sin^2 \varepsilon_1 + k^2 \cos^2 \varepsilon_1} = 0{,}854 v_1 = 3{,}785 \text{ m/s}.$$

Pro vodorovnou resp. svislou souřadnici odraženého míčku v čase *t* platí

$$u = v_2 t \cos\beta, \quad w = v_2 t \sin\beta - \frac{1}{2} g t^2 .$$

Dosazení za *t* z rovnice pro *u* do vztahu pro *w* získáme rovnici křivky, po které se bude odražený míček pohybovat, tj.

$$w = u \operatorname{tg}\beta - \frac{1}{2} \frac{g u^2}{v_2^2 \cos^2 \beta} .$$

Jestliže nyní vypočteme průsečík této trajektorie (paraboly) s plochou nakloněné roviny $w = -u \operatorname{tg}\alpha$, potom dostaneme pro hledanou vzdálenost

$$-u \operatorname{tg}\alpha = u \operatorname{tg}\beta - \frac{1}{2} \frac{g u^2}{v_2^2 \cos^2 \beta} \qquad \Rightarrow \qquad d = u = \frac{2(\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\alpha) v_2^2 \cos^2 \beta}{g} \doteq 2{,}5 \text{ m}.$$

10. Vypočtěte maximální rázovou sílu F_m působící na horolezce s lanem délky $L = 20\ \mathrm{m}$, jestliže spadne z výšky $h = 10\ \mathrm{m}$ nad pevným zajištěním J na plnou délku lana. Lano má průtažnost $\varepsilon = 5\ \%$ pro normové zatížení $F_N = 0{,}8\ \mathrm{kN}$, hmotnost horolezce je $m = 80\ \mathrm{kg}$. Předpokládejte lineární chování natahovaného lana.

Řešení: Předpokládáme-li lineární protahování lana, potom velikost síly působící na lano (resp. horolezce) můžeme vyjádřit jako

$$F = kx = \frac{C}{L}x,$$

kde k resp. C je konstanta charakterizující pružnost lana a x je protažení lana. Konstantu k resp. C můžeme určit z průtažnosti lana jako

$$k = \frac{F_N}{x_N} = \frac{F_N}{L\varepsilon} \qquad \Rightarrow \qquad C = \frac{F_N}{\varepsilon}.$$

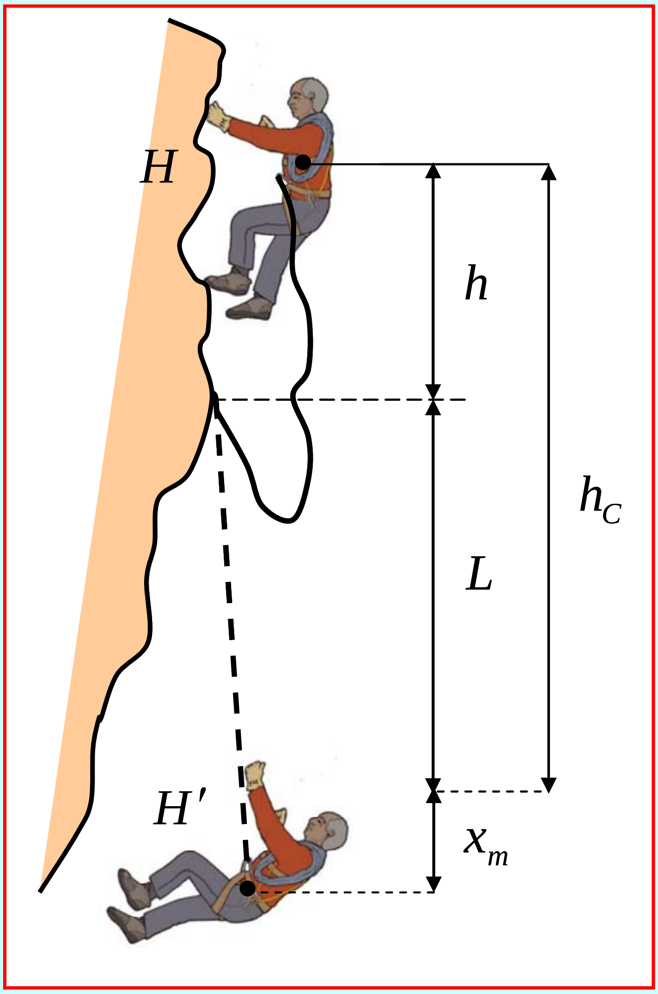
Při pádu se při protažení lana o x_m vykoná práce

$$A = \int_0^{x_m} F\,\mathrm{d}x = \int_0^{x_m} \frac{C}{L}x\,\mathrm{d}x = \frac{C}{2L}x_m^2 = \frac{LF_m^2}{2C},$$

$$F_m = kx_m = \frac{C}{L}x_m \quad \Rightarrow \quad x_m = \frac{LF_m}{C},$$

kde x_m je maximální protažení lana při pádu a F_m je maximální síla v laně. Vykonaná práce se musí rovnat změně potenciální energie ΔE_p horolezce při pádu, pro kterou platí

$$\Delta E_p = mg(h + L + x_m) = mg(h_c + x_m),$$



kde h_c je celková výška pádu. Dosazením do rovnice $\Delta E_p = A$ získáme kvadratickou rovnici

$$F_m^2 - 2mgF_m - \frac{2Cmgh_c}{L} = 0,$$

jejímž řešením dostaneme pro maximální rázovou sílu F_m

$$F_m = mg + \sqrt{m^2g^2 + 2Cmg\frac{h_c}{L}} = mg\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2F_N}{\varepsilon mg}\frac{h_c}{L}}\right) = 6{,}97\ \mathrm{kN}.$$

Lano se při pádu protáhne o $x_m = L\varepsilon F_m / F_N = 8{,}7\ \mathrm{m}$.

11. Určete vztahy pro volný pád z věže výšky $h = 100$ m v zeměpisné šířce $\varphi = 50^\circ$, jestliže budeme uvažovat s rotací Země kolem své osy úhlovou rychlostí $\omega = 7{,}27 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{s}^{-1}$ (tj. uvažujte vliv Coriolisovy síly). Vypočtěte, o kolik se odchýlí bod dopadu od svislice. Odpor prostředí zanedbejte.

Řešení: Pro volný pád při uvážení otáčení Země kolem své osy můžeme napsat pohybovou rovnici

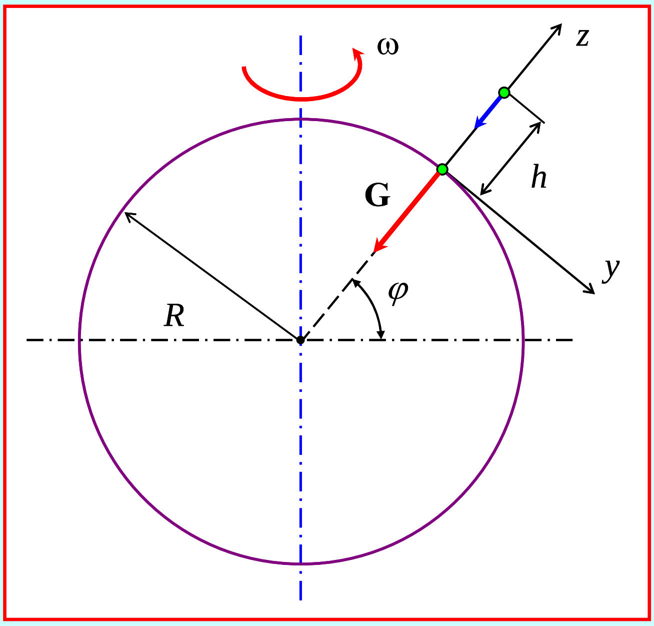
$$m\frac{\mathrm{d}\mathbf{v}}{\mathrm{d}t} = \mathbf{G} + \mathbf{F}_c = m\mathbf{g} - 2m(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}),$$

kde $\mathbf{G}$ je tíhová síla, $\mathbf{F}_c$ je Coriolisova síla, $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$ je tíhové zrychlení, $\boldsymbol{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z) = (0, -\omega\cos\varphi, \omega\sin\varphi)$ je vektor úhlové rychlosti rotace Země kolem své osy. Pro snadnější řešení našeho příkladu jsme si zvolili osu z souřadného systému ve směru tíhového zrychlení a osu x kolmo na poledník v daném místě na povrchu Země. Uvedenou pohybovou rovnici můžeme zapsat jako 3 skalární rovnice

$$\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = 2(v_y\omega_z - v_z\omega_y),$$

$$\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = -2v_x\omega_z = -2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\omega_z,$$

$$\frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = -g + 2v_x\omega_y = -g + 2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\omega_y.$$



Integrací druhé a třetí rovnice (podle y resp. z) a použitím počátečních podmínek našeho příkladu ($t = 0 \Rightarrow x = y = 0$, $z = h$, $v_x = v_y = v_z = 0$) obdržíme

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v_y = -2\omega_z x,$$

resp. $$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = v_z = -gt + 2\omega_y x$$

a dosazením do první rovnice pro souřadnici x dostaneme

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -4(\omega_y^2 + \omega_z^2)x + 2g\omega_y t = -Ax + Bt, \quad A = 4(\omega_y^2 + \omega_z^2) = 4\omega^2, \quad B = -2g\omega\cos\varphi.$$

Předchozí rovnice je obyčejnou diferenciální rovnicí druhého řádu s konstantními koeficienty, která má řešení ve tvaru

$$x = C_1 \sin 2\omega t + C_2 \cos 2\omega t + \frac{B}{A} t \qquad \Rightarrow \qquad v_x = 2\omega (C_1 \cos 2\omega t - C_2 \sin 2\omega t) + \frac{B}{A},$$

kde C_1 a C_2 jsou konstanty, které lze určit dosazením počátečních podmínek, tj.

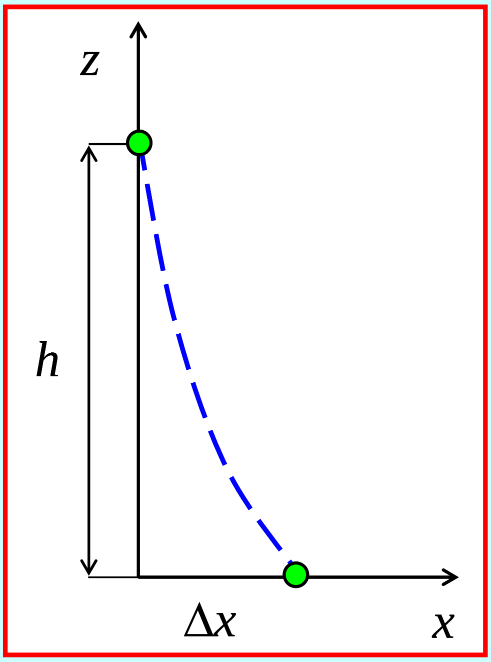
$$C_2 = 0 \qquad \text{a} \qquad C_1 = -\frac{1}{2\omega}\frac{B}{A} = \frac{g\cos\varphi}{4\omega^2}.$$

Konečné vztahy pro volný pád z výšky tedy můžeme získat integrací rovnic pro v_x a v_y podle času s uvážením počátečních podmínek úlohy, tj. dostaneme

$$x = \frac{-g\cos\varphi}{2\omega}\left(t - \frac{\sin 2\omega t}{2\omega}\right),$$

$$y = g\sin\varphi\cos\varphi\left(\frac{t^2}{2} + \frac{\cos 2\omega t - 1}{4\omega^2}\right),$$

$$z = h - \frac{1}{2}gt^2 + g\cos^2\varphi\left(\frac{t^2}{2} + \frac{\cos 2\omega t - 1}{4\omega^2}\right).$$



Jelikož $\omega t << 1$ vzhledem k tomu, že doba pádu t je zanedbatelně malá vůči periodě otáčení Země, můžeme rozvinout funkce sinus a kosinus v Taylorovu řadu a omezit se pouze na první dva členy rozvoje, tj.

$$\sin 2\omega t \doteq 2\omega t - \frac{4}{3}(\omega t)^3, \qquad \cos 2\omega t \doteq 1 - 2(\omega t)^2.$$

Potom obdržíme přibližné vztahy pro volný pád

$$x \doteq -\frac{1}{3}\omega g\cos\varphi t^3, \qquad y \doteq 0, \qquad z \doteq h - \frac{1}{2}gt^2.$$

Odchylku bodu dopadu od svislice určíme tak, že vypočteme dobu dopadu t na povrch Země a dosadíme-li do vztahu pro x. Tj. položíme-li $z = 0$, potom pro dobu volného pádu obdržíme

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}},$$

a pro odchylku od svislice dostaneme

$$\Delta x \doteq -\frac{1}{3}g\omega\cos\varphi\left(\frac{2h}{g}\right)^{3/2} \doteq -1{,}4\ \text{cm}.$$