Mechanika

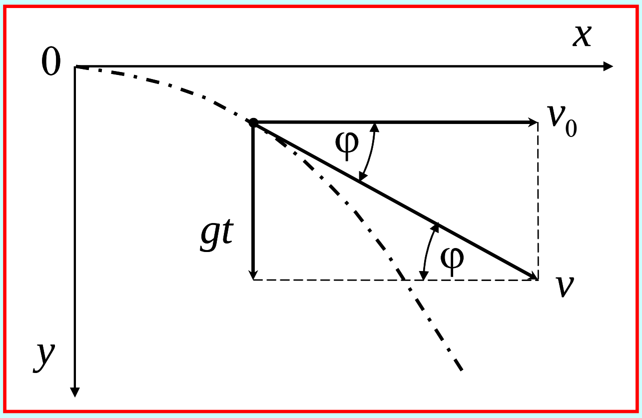
Kinematika hmotných bodů

1. Z rozhledny o výšce h = 30 m byl vržen kámen ve vodorovném směru rychlostí $v_0 = 10$ m/s. Určete, jakou trajektorii opisuje, jestliže zanedbáme odpor prostředí. Dále vypočtěte velikost rychlosti v při dopadu na zem, úhel φ, který svírá vektor rychlosti s vodorovnou rovinou při dopadu, poloměr křivosti dráhy R v bodě dopadu a vodorovnou vzdálenost d místa dopadu od paty rozhledny.

Řešení: Obecný pohyb hmotného bodu v homogenním tíhovém poli můžeme rozložit na pohyb ve vodorovném a svislém směru (viz.obr.). Ve vodorovném směru se vržené těleso pohybuje rovnoměrným pohybem a ve směru svislém rovnoměrně zrychleným pohybem. Pro dráhu a rychlost v jednotlivých směrech tedy platí

$$y = \frac{gt^2}{2}, \qquad v_y = gt,$$

$$x = v_0 t, \qquad v_x = v_0.$$



Sloučíme-li vztahy pro x a y, potom dostáváme pro křivku letu $y(x) = g(x/v_0)^2/2$.

Kámen se tedy pohybuje po parabole.
Celkový čas letu t dostaneme dosazením výšky h do rovnice pro y, tj. $t = \sqrt{2h/g}$. Rychlost v a úhel φ při dopadu na zem vypočteme z následujících vztahů

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{v_0^2 + g^2t^2} = \sqrt{v_0^2 + 2gh} = 26{,}2 \text{ m/s},$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{gt}{v_0} = \frac{\sqrt{2gh}}{v_0}, \qquad \varphi = \operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2gh}}{v_0} = 67{,}6^\circ.$$

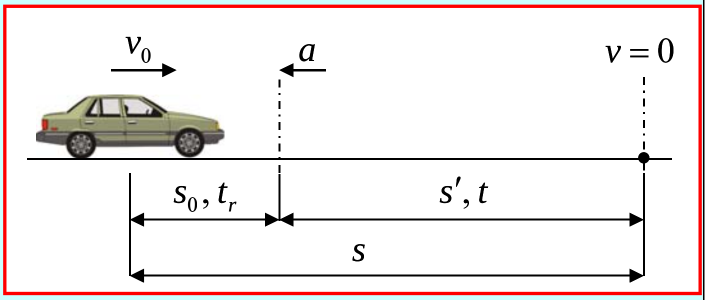
Pro normálové zrychlení a_n v čase t a následně i pro poloměr křivosti R dráhy platí

$$a_n = \frac{v^2}{R} = g\cos\varphi, \qquad \cos\varphi = \frac{v_0}{v} \qquad \Rightarrow \qquad R = \frac{v^2}{g\cos\varphi} = \frac{v^3}{gv_0} = \frac{\sqrt{(v_0^2 + 2gh)^3}}{gv_0} \doteq 184{,}2 \text{ m}.$$

Vodorovnou vzdálenost d místa dopadu od paty rozhledny poté můžeme vypočítat jako

$$d = v_0 t = v_0\sqrt{2h/g} = 24{,}7 \text{ m}.$$

2. Určete velikost brzdné dráhy automobilu, který se pohybuje rychlostí $v_{01} = 50\ \mathrm{km/h}$ resp. $v_{02} = 90\ \mathrm{km/h}$, jestliže předpokládáme, že reakční doba řidiče a prodleva brzdného účinku po sešlápnutí brzdového pedálu $t_r = 1\ \mathrm{s}$ a automobil brzdí s konstantním zpomalením $a = 2{,}5\ \mathrm{m/s^2}$.



Řešení: Automobil se bude pohybovat rovnoměrně přímočaře rychlostí v_0 po dobu t_r a poté začne rovnoměrně zpomalovat. Pro dráhu s resp. rychlost v pohybu automobilu můžeme psát

$$s = s_0 + s' = v_0 t_r + v_0 t - \frac{1}{2} a t^2 ,$$

$$v = v_0 - at .$$

Z předchozí rovnice pro rychlost určíme dobu t, za kterou auto zastaví svůj pohyb (rychlost $v = 0$), a dosazením do vztahu pro dráhu získáme celkovou brzdnou dráhu

$$t = \frac{v_0}{a} \quad \Rightarrow \quad s = v_0 t_r + \frac{v_0^2}{2a} \quad \Rightarrow \quad s_1 = 52{,}5\ \mathrm{m} \ \text{ a } \ s_2 = 138{,}9\ \mathrm{m} .$$