Mechanika tuhého tělesa

- Vypočtěte těžiště homogenní obdélníkové desky o stranách $a = 40$ cm a $b = 32$ cm , do které byl ve čtvrtině úhlopříčky vyříznut kruhový otvor o poloměru $r = 5$ cm . Souřadnicový systém si zvolte ve středu obdélníkové desky.

  [$x_T = -6{,}54$ mm , $y_T = -5{,}23$ mm]

- Kolo o poloměru R = 30 cm a hmotnosti m = 3 kg se kutálí bez tření po nakloněné rovině délky l = 5 m a úhlu sklonu $\alpha = 25^\circ$. Určete moment setrvačnosti J kola, jestliže jeho rychlost na patě nakloněné roviny je $v = 4{,}6$ m/s.

  [$J = 0{,}259$ kgm^2]

- Do tenké homogenní tyče délky $l = 50$ cm a hmotnosti $m_1 = 1$ kg narazí ve vzdálenosti $l/3$ od jejího těžiště kulka o hmotnosti $m_2 = 10$ g , která letí rychlostí $v_2 = 300$ m/s . Tyč se může volně otáčet kolem těžišťové osy a kulka narazí ve směru kolmém na tyč i osu otáčení. Po nárazu kulka uvízne v tyči. Určete úhlovou rychlost ω, se kterou se tyč po nárazu začne otáčet.

  [$\omega = 23{,}7$ s^{-1}]

- Plný homogenní kotouč o poloměru $r = 0{,}5$ m a hmotnosti $m = 50$ kg , který se otáčí s frekvencí $f = 1000$ ot/min. chceme zastavit silou působící kolmo k obvodu kotouče, jež je závislá na čase t podle vztahu $F = kt$ ($k = 10$ N/s). Sílu vyvíjíme přitlačováním brzdy ke kotouči, přičemž součinitel smykového tření mezi kotoučem a brzdou $\mu = 0{,}5$. Určete čas t, za který se kotouč zastaví.

  [$t \doteq 22{,}9$ s]

- Homogenní koule o poloměru r = 20 cm se kutálí bez klouzání z vrcholu kulové plochy o poloměru R = 50 cm . Určete úhlovou rychlost ω koule v místě, kdy opustí povrch kulové plochy.

  [$\omega = 10$ s^{-1}]

- Určete těžiště půlkruhové desky o poloměru R, tloušťce t vyrobené z materiálu o hustotě ρ.

  [$\frac{4}{3\pi}R$ od rovné hrany, na ose symetrie]

- Homogenní deska se skládá z půlkruhu o poloměru R a z rovnoramenného trojúhelníka výšky $2R$ a velikosti podstavy $2R$. Určete vzdálenost těžiště takovéto desky od půlkruhové hrany.

$$[\frac{3\pi+16}{3\pi+12}R \quad \text{na ose symetrie}]$$

- Určete polohu těžiště homogenní desky tvaru kruhové úseče, jejíž středový úhel je 2α a poloměr R, vzhledem ke středu kruhu.

$$[\frac{2}{3}\frac{\sin^3\alpha}{\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}R \quad \text{na ose symetrie}]$$

- Jaký výkon má kůň, který táhne saně konstantní rychlostí v do kopce. Hmotnost saní je m kg, smykové tření mezi saněmi a povrchem kopce je stálé, součinitel tření je μ a sklon kopce je α.

$$[P = mv(\mu g\cos\alpha + g\sin\alpha)]$$

- Na kouli o hmotnosti m_1 pohybující se rychlostí v_1 narazí koule o hmotnosti m_2 pohybující se rychlostí v_2 v tomtéž směru. Ráz pokládejte za absolutně nepružný. Vypočtěte rychlost v a kinetickou energii W_k obou koulí po nárazu.

$$[v = \frac{m_1v_1+m_2v_2}{m_1+m_2}, \quad W_k = \frac{(m_1v_1+m_2v_2)^2}{2(m_1+m_2)}]$$

- Vypočtěte změnu kinetické energie ΔW_k a impulsu síly I u koule, která narazí rychlostí v kolmo na rovinnou překážku, jež se pohybuje ve stejném směru stálou rychlostí u.

$$[I = \Delta p = -2m(v-u), \quad \Delta W_k = 2m(v-u)u]$$

- Vypočtěte rychlost střely v pomocí tzv. balistického kyvadla. Metoda je založena na měření úhlu α vychýlení kyvadla po uvíznutí střely. Hmotnost kyvadla je M, hmotnost střely je m a kyvadlo lze pokládat za matematické kyvadlo délky L.

$$[v = 2\frac{M+m}{m}\sqrt{Lg}\sin\frac{\alpha}{2}]$$

- Dvě tělesa (koule) o hmotnostech m_1 a m_2 jsou zavěšena na vláknech různé délky l_1 a l_2 tak, že se koule dotýkají. První kyvadlo vychýlíme z původní polohy o úhel φ a pustíme. Nastane přímý(středový) ráz obou koulí. Určete, o jaké úhly α_1, α_2 vzhledem ke svislému směru se vychýlí kyvadla po rázu. Ráz pokládejte za pružný.

$$[\sin\frac{\alpha_1}{2} = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\sin\frac{\varphi}{2}, \quad \sin\frac{\alpha_2}{2} = \frac{2m_1}{m_1+m_2}\sqrt{\frac{l_1}{l_2}}\sin\frac{\varphi}{2}]$$

- Vypočtěte sílu F, kterou působí automobil o hmotnosti m, pohybující se stálou rychlostí na vydutém mostě kruhového tvaru s poloměrem křivosti R.

$$[F = mg - \frac{mv^2}{2}]$$

- Určete, jakou minimální rychlostí v_{min} musí projet motocyklista dráhu ve tvaru kruhové smyčky o poloměru R.

$$[v_{\min} = \sqrt{gR}]$$

- Vypočtěte minimální součinitel vlečného tření μ mezi pneumatikami automobilu a vozovkou tak, aby mohl vůz projet zatáčku o poloměru R = 200 m stálou rychlostí $v = 100$ km/h.

$$[\mu = \frac{v^2}{Rg}]$$

- Ke svislé otáčivé ose je připevněno vlákno délky L na jehož konci je upevněna kulička o hmotnosti m. Určete, o jaký úhel α se vychýlí vlákno, otáčí li se osa úhlovou rychlostí ω. Dále vypočtěte sílu F, kterou je namáháno vlákno.

$$[\cos\alpha = \frac{g}{\omega^2 L}, \quad F = m\omega^2 L]$$

- Letadlo provádí svislou smyčku (loping) o poloměru R = 200 m rychlostí $v = 360$ km/h. Určete, jaká síla F tlačí pilota o hmotnotnosti m = 80 kg do sedadla v dolní resp.horní části smyčky.

$$[F_1 = 4784{,}8 \text{ N}, \quad F_2 = 3215{,}2 \text{ N}]$$

- Sedadlo houpačky i s osobou na něm sedící má hmotnost M kg. Určete maximální sílu F, kterou jsou namáhány provazy délky L, přivedeme-li houpačku do pohybu vychýlením o úhel α z rovnovážné polohy, a maximální rychlost v houpání.

$$[F = m\left(g + \frac{4g}{L}\sin^2\frac{\alpha}{2}\right), \quad v = \sqrt{2gL}\sin\frac{\alpha}{2}]$$

- Přes pevnou kladku o momentu setrvačnosti J a poloměru r je nataženo lanko, na kterém jsou zavěšena 2 závaží o hmotnostech $m_2 > m_1$.Vypočtěte zrychlení pohybu závaží a. Dále určete namáhání vlákna T za předpokladu, že lanko se po kladce nesmýká.

$$[a_2 = -a_1 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2 + \frac{J}{r^2}} g, \quad T_1 = \frac{2m_1 m_2 g + \frac{m_1 g J}{r^2}}{m_1 + m_2 + \frac{J}{r^2}}, \quad T_2 = \frac{2m_1 m_2 g + \frac{m_2 g J}{r^2}}{m_1 + m_2 + \frac{J}{r^2}}]$$

- Homogenní tyč délky L je zavěšena za jeden svůj konec kolem vodorovné osy otáčení. Určete, jakou počáteční úhlovou rychlost ω musíme udělit tyči, aby se vychýlila o úhel $\alpha = 90°$.

$$[\omega = \sqrt{\frac{3g}{L}}]$$

- Vodorovný kotouč o poloměru R a momentu setrvačnosti J se volně otáčí ve vodorovné rovině konstantní rychlostí. Za 1 minutu vykoná N otoček. Na jeho okraji se nachází člověk o hmotnosti m. Vypočtěte, jak se změní rychlost otáčení kotouče a celková kinetická energie, přejde-li člověk z okraje kotouče do středu.

$$[\omega = N\left(1+\frac{mR^2}{J}\right), \quad W_k = \frac{4\pi^2 N^2 mR^2}{36\cdot 10^2 \cdot 2}\left(1+\frac{mR^2}{J}\right)]$$

- Na vodorovném homogenním kotouči o hmotnosti M a poloměru R stojí člověk o hmotnosti m. Kotouč se může otáčet bez tření okolo svislé osy procházející jeho středem. Určete, jakou úhlovou rychlostí se bude kotouč otáčet, půjde-li člověk po kružnici o poloměru r rychlostí v vzhledem ke kotouči.

$$[\omega = -\frac{mrv}{\frac{1}{2}MR^2 + mr^2}]$$

- Kterou částí šavle (tj. jak daleko od drzadla) musíme seknout do překážky, abychom prakticky nepocítili v ruce úder? Šavli považujte za homogenní tyč o délce L.

$$[d = \frac{2}{3}L]$$