

Mechanické vlnění



Vlnění

– představuje šíření nějakého **rozhnutí** **prostorem** (např. deformace pružného tělesa, změny teploty, tlaku, hustoty, intenzity silového pole,...)



vlnění **přenáší energii** **prostorem**



vlny se šíří **konečnou rychlostí c**

Tyto veličiny se v dané místě prostoru mění s časem (kmitají)

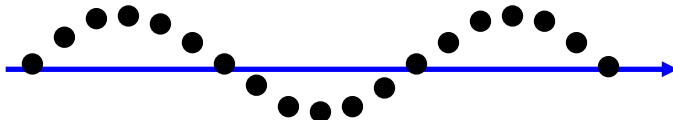
2 základní typy vlnění:

A) Vlnění podélné (longitudinální)

- kmity se dějí ve směru šíření vlny (např. elastická podélná vlna v pevných látkách, kapalinách a plynech)

B) Vlnění příčné (transverzální)

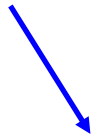
- kmity se dějí kolmo k šíření vlny (např. elmag. vlny, elastická příčná vlna v pevných látkách)



Mechanické vlnění

⊕ časové zpoždění vlny:

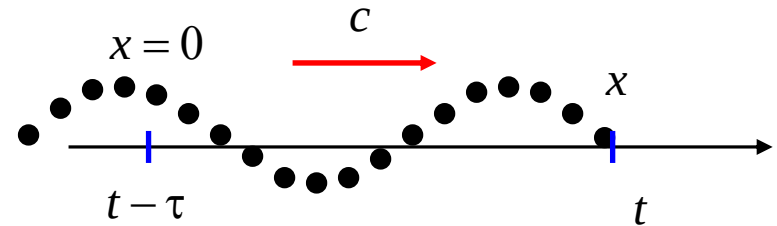
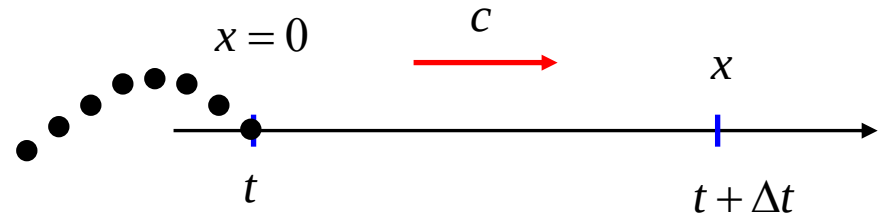
$$\tau = \frac{x}{c}$$



$$u(x,t) = u(0, t - x/c)$$



Funkce $u(x,t)$ popisuje veličinu, která se šíří ve směru osy x (např. výchylku částic prostředí)



⊕ Vlnění šířící se ve směru osy x : $u = f(t - x/c)$

⊕ Vlnění šířící se proti směru osy x : $u = f(t + x/c)$

⊕ **Harmonické vlnění:**

$$u(x,t) = A \cos[\omega(t - x/c) + \varphi_0]$$

Charakteristiky vlnění

⊕ **Fáze vlnění:**

$$\varphi = \omega(t - x/c) + \varphi_0$$

⊕ **Fázová rychlost:**

$$\varphi = \text{konst.} \quad \longrightarrow \quad d\varphi = 0 \quad \longrightarrow \quad c = \frac{dx}{dt}$$

⊕ **Kruhová frekvence:**

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$$

⊕ **Vlnová délka:**

$$\lambda = cT = \frac{c}{f}$$

dráha, kterou urazí vlna za dobu jedné periody

⊕ **Vlnové číslo (vektor):**

$$k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \vec{k} = \frac{\omega}{c} \vec{n} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{n}$$

⊕ **Fázový rozdíl:**

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi \frac{x_2 - x_1}{\lambda}$$

⊕ **Harmonická vlna:**

$$u(x, t) = A \cos[\omega t - kx + \varphi_0] \quad \longleftrightarrow \quad u(x, t) = A e^{i[\omega t - kx + \varphi_0]}$$
$$u(x, t) = A \sin[\omega t - kx + \varphi_0]$$

Vlnová rovnice

⊕ Vlnění musí splňovat:

$$u = f(t \mp x/c) = f(s)$$

netlumené vlnění šířící
se homogenním
izotropním prostředím

• změna podle času:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial s} \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial s^2}$$

• změna podle souřadnice x:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial s} \cdot \left(\mp \frac{1}{c} \right) \quad \longrightarrow \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} \cdot \left(\mp \frac{1}{c} \right)^2 = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial s^2} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 u = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

Vlnová rovnice

rychlost
šíření vln

Obecné řešení:

$$u = f(t - x/c) + g(t + x/c)$$

Vlnová rovnice

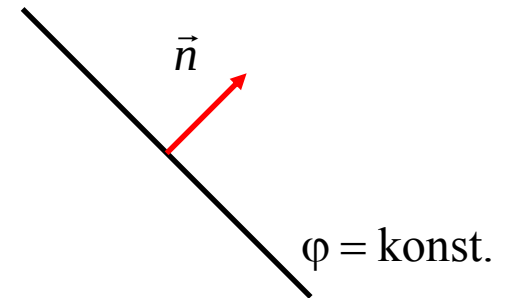
- ⊕ jelikož vlnová rovnice je lineární, platí **princip superpozice řešení**:

$$u_1, u_2, u_3 \dots \text{řešení} \longrightarrow u = \sum_k u_k \dots \text{řešení}$$

- ⊕ Elementární řešení vlnové rovnice:

A) Rovinná vlna:

$$u(\vec{r}, t) = f[\omega t - \vec{k}\vec{r}]$$



- **harmonická rovinná vlna:**

$$u(\vec{r}, t) = A \cos[\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0]$$

$$u(\vec{r}, t) = A e^{i[\omega t - \vec{k}\vec{r} + \varphi_0]}$$

- ⊕ **rychlost šíření vlnového rozruchu závisí na frekvenci ω :** $\omega = \omega(\vec{k})$

každou vlnu lze
složit superpozicí
rovinných vln

$$\longrightarrow u(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}} A(\vec{k}) e^{i[\omega t - \vec{k}\vec{r}]}$$

disperze vln

Vlnová rovnice

B) Sférická (kulová) vlna:

- rozruch v daném čase t závisí pouze na vzdálenosti $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
- hledejme tedy řešení vlnové rovnice ve tvaru: $u = u(r, t)$



$$u = \frac{f(r - ct)}{r} + \frac{g(r + ct)}{r}$$

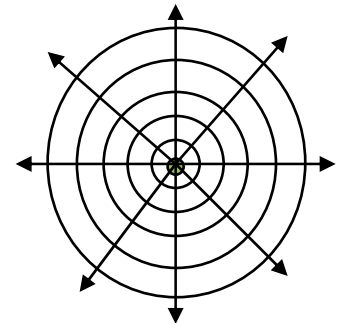
obecné řešení

$$u_1 = \frac{g(r - ct)}{r}$$

divergentní sférická vlna

$$u_2 = \frac{g(r + ct)}{r}$$

konvergentní sférická vlna

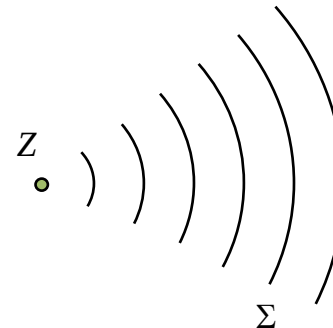


$\varphi = \text{konst.}$

- harmonická sférická vlna:

$$u = \frac{A}{r} \cos(\omega t \mp kr + \varphi_0)$$

$$u = \frac{A}{r} e^{i[\omega t \mp kr + \varphi_0]}$$



Vlnová rovnice

⊕ hledejme řešení vlnové rovnice ve tvaru harmonické vlny

$$u(\vec{r}, t) = U(\vec{r})e^{i\omega t}$$

$$\nabla^2 u = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$



$$\nabla^2 U + k^2 U = 0$$

Helmholzova rovnice

diferenciální rovnice pro
amplitudu vlnového pole

$$\nabla^2 u = \nabla^2 U e^{i\omega t}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\omega^2 U e^{i\omega t}$$



Vlastnosti vlnění

Huygens-Fresnelův princip:

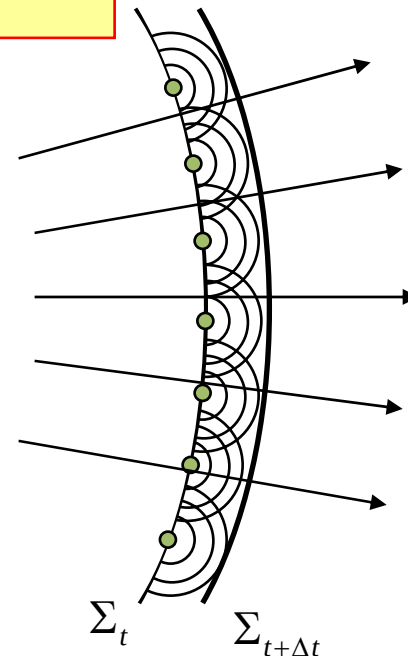
vlnění se šíří prostorem tak, že každý bod, do něhož vlnění dospěje, se stává zdrojem elementárního vlnění, které se rozšíří na elementární vlnoplochu, jejíž každý bod se opět stává zdrojem vlnění.

Elementární vlny z bodů ležících na stejné vlnoploše se skládají a vytvářejí vlnoplochu v následujícím čase.



Vlnoplocha – plocha na níž má vlna v daný časový okamžik konstantní fázi $\varphi = \text{konst.}$

Paprsek – normála k vlnoploše (pro izotropní prostředí)



Vlastnosti vlnění

⊕ Interference (skládání) vln:

-podle **principu superpozice** platí, že vlny se v prostředí šíří nezávisle na ostatních vlnách

- výsledná vlna je součtem dílčích vln, které se skládají

$$u(\vec{r}, t) = \sum_k u_k(\vec{r}, t)$$

Interference dvou vln stejné frekvence:

$$u_1(x, t) = A_1 \cos(\omega t - kx + \varphi_1)$$

$$u_2(x, t) = A_2 \cos(\omega t - kx + \varphi_2)$$


$$u_1 + u_2 = \cos(\omega t - kx) (A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2) - \sin(\omega t - kx) (A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2)$$

$$u = u_1 + u_2 = A \cos(\omega t - kx + \varphi) = A \cos(\omega t - kx) \cos \varphi - A \sin(\omega t - kx) \sin \varphi$$

Amplituda

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}$$

Vlastnosti vlnění

Interference dvou vln stejné frekvence:

- výsledné vlnění je charakterizováno v různých místech prostoru různou amplitudou A (**pravidelné kolísání amplitudy resp. intenzity vlny**)

**Amplituda závisí na
fázovém rozdílu vlnění v
daném místě**

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

Fázový rozdíl:

$$\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = 2\pi \frac{\Delta d}{\lambda}$$

**Intenzita vlnění je
úměrná čtverci
amplitudy**

Interferenční minima:

$$\cos \Delta\varphi = -1 \quad \longrightarrow \quad \Delta\varphi = \pi + 2\pi n \quad \longrightarrow \quad \Delta d = (2n + 1) \frac{\lambda}{2}$$

Interferenční maxima:

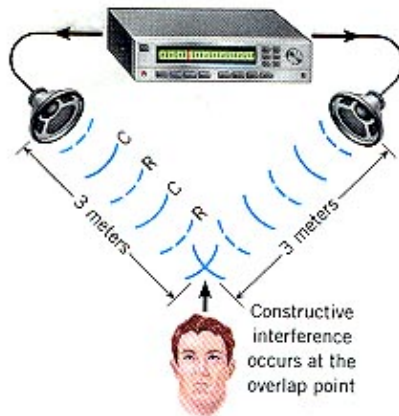
$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\cos \Delta\varphi = 1 \quad \longrightarrow \quad \Delta\varphi = 2\pi n \quad \longrightarrow \quad \Delta d = n \frac{\lambda}{2}$$

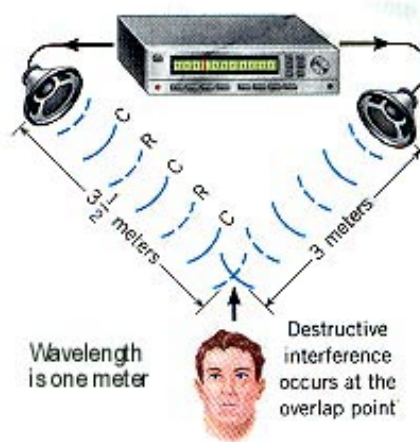
Vlastnosti vlnění

Interference vlnění:

- intenzita (resp.amplituda) vlnění je v daném místě prostoru zesílena nebo zeslabena v závislosti na frekvenci a fázi vlnění



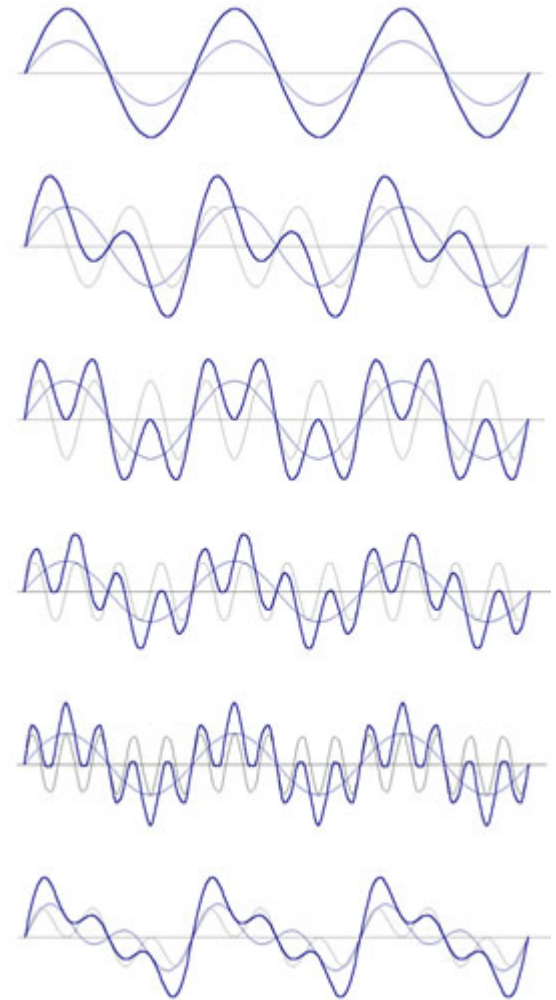
**konstruktivní
interference**



**destruktivní
interference**

Slyšitelný zvuk

$$\lambda = c / f = 22 - 0,02 \text{ m}$$

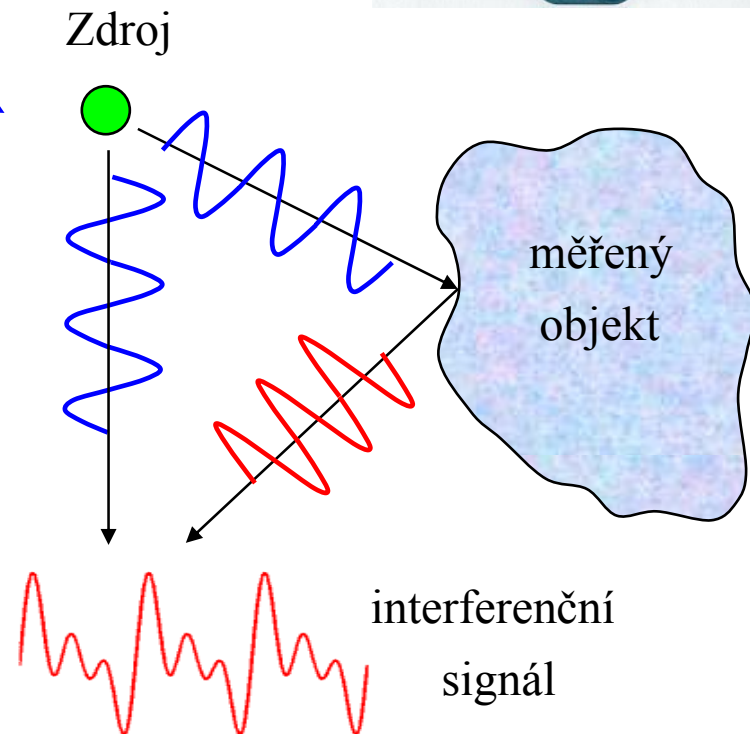
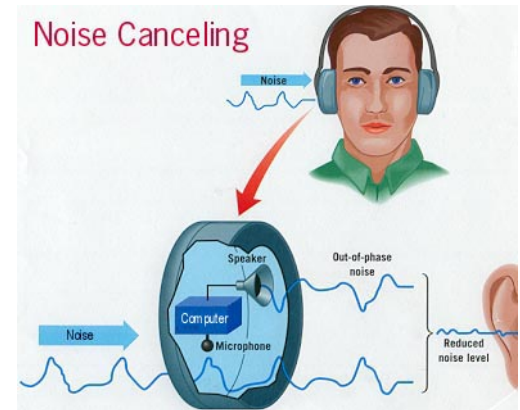


Vlastnosti vlnění

Interference vlnění – aplikace:

- ✚ tlumení šumu (hluky) destruktivní interferencí
- ✚ interferenční metody měření

analýzou interferenčního signálu můžeme získat informace o fyzikálních vlastnostech měřeného objektu (rychlost, tvar, ...)



Vlastnosti vlnění

Stojaté vlnění:

- důležitý případ interference dvou stejných vln, šířících se proti sobě

$$u_1(x, t) = A_0 \sin(\omega t - kx)$$

$$u_2(x, t) = A_0 \sin(\omega t + kx)$$


$$u = u_1 + u_2 = 2A_0 \cos(kx) \sin(\omega t) = A \sin(\omega t)$$

**Amplituda stojátého
vlnění závisí na poloze**

$$A = 2A_0 \cos(kx)$$

**vzdálenost sousedních
uzlů nebo kmiten - $\lambda/2$**

- nevzniká postupné vlnění
 - vzniknou harmonické kmity se stejnou fází
 - výsledná amplituda kmitů závisí periodicky na vzdálenosti
- 

Maxima amplitudy (kmitny):

$$\cos(kx) = \pm 1 \quad \longrightarrow \quad x = n \frac{\lambda}{2}$$

Minima amplitudy (uzly):

$$\cos(kx) = 0 \quad \longrightarrow \quad x = (2n - 1) \frac{\lambda}{4}$$

Vlastnosti vlnění

Příčné stojaté vlnění:

Stojaté vlnění vznikne vždy, když proti sobě postupují stejně polarizované vlny se stejnou frekvencí

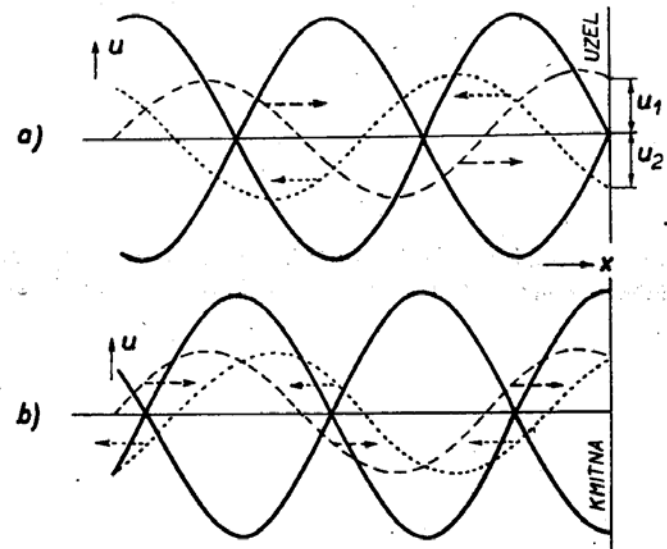
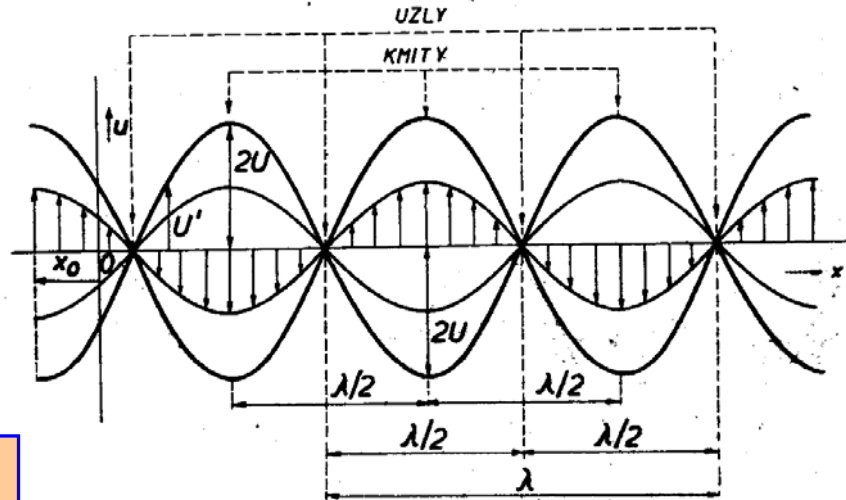
Stojaté vlnění vzniká při odrazu postupné vlny na pevném resp. volném konci

Pevný konec – odraz s opačnou fází

⊕ na pevném konci je uzel

Volný konec – odraz se stejnou fází

⊕ na volném konci je kmitna



Vlastnosti vlnění

- ✚ stojaté vlnění se projeví jako **chvění materiálu**.
- ✚ stojatého vlnění se využívá u mnoha hudebních nástrojů



A) Chvění oboustranně omezené bodové řady:

- oba konce jsou pevné (např. struna) – na koncích vznikají 2 uzly

$$L = n \frac{\lambda}{2}$$



$$f_n = \frac{c}{\lambda_n} = n \frac{c}{2L}$$

$$f_1 = \frac{c}{2L}$$

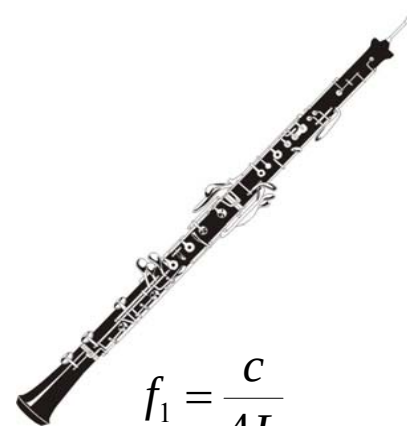
B) Chvění jednostranně omezené bodové řady:

- jeden konec je pevný, druhý volný (např. píšťala)
- na koncích vzniká uzel a kmitna

$$L = (2n-1) \frac{\lambda}{4}$$



$$f_n = \frac{c}{\lambda_n} = (2n-1) \frac{c}{4L}$$



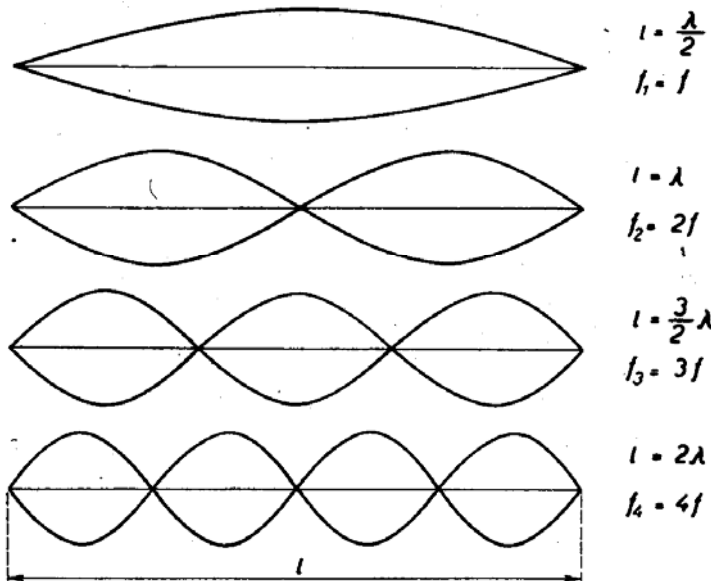
$$f_1 = \frac{c}{4L}$$

**základní
frekvence**

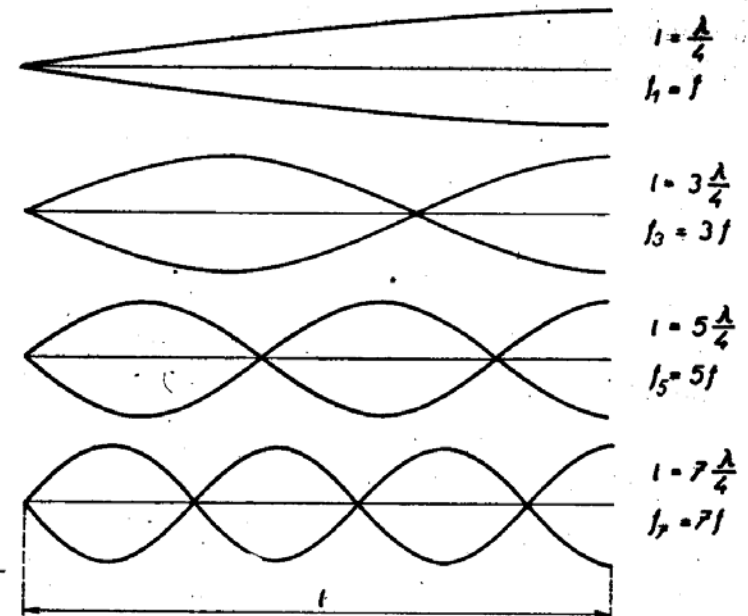
Vlastnosti vlnění

chvění struny

$$l = k \frac{\lambda}{2}; \quad \lambda = \frac{2l}{k}$$



chvění píšť'aly



Frekvence zvuku závisí poté na délce a rychlosti šíření vlnění v daném materiálu (materiál struny, vzduchový sloupec)

Vlastnosti vlnění

Polarizace vlnění:

Polarizované vlnění

- příčné vlnění, jehož amplituda je různá v různých směrech kolmých na směr šíření

Lineárně polarizované vlnění

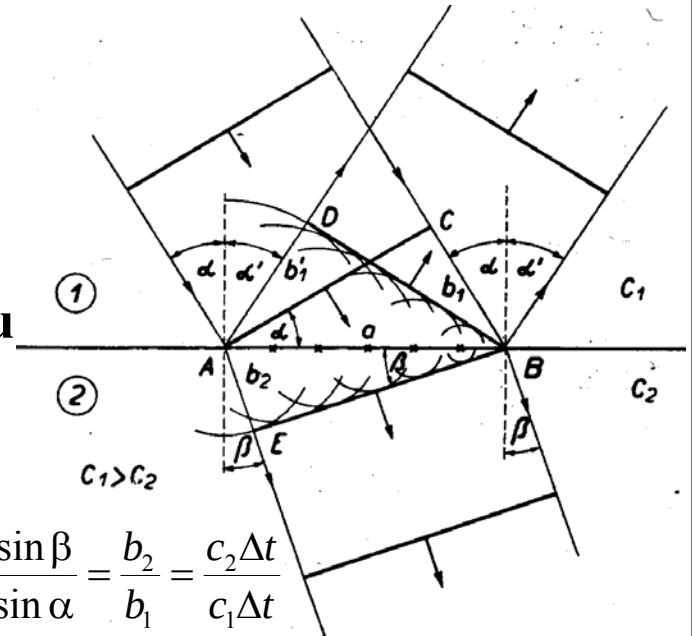
- příčné vlnění, jehož všechny výchylky leží ve všech místech ve stejné rovině

Lom a odraz vlnění:

- dopadá-li rovinná vlna na rovinné rozhraní potom platí **zákon odrazu a lomu**

$$\alpha = \alpha'$$

$$\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{c_2}{c_1}$$



$$\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{b_2}{b_1} = \frac{c_2 \Delta t}{c_1 \Delta t}$$

Vlastnosti vlnění

⊕ Úplný (totální) odraz vlnění:

- pokud platí: $c_1 < c_2$

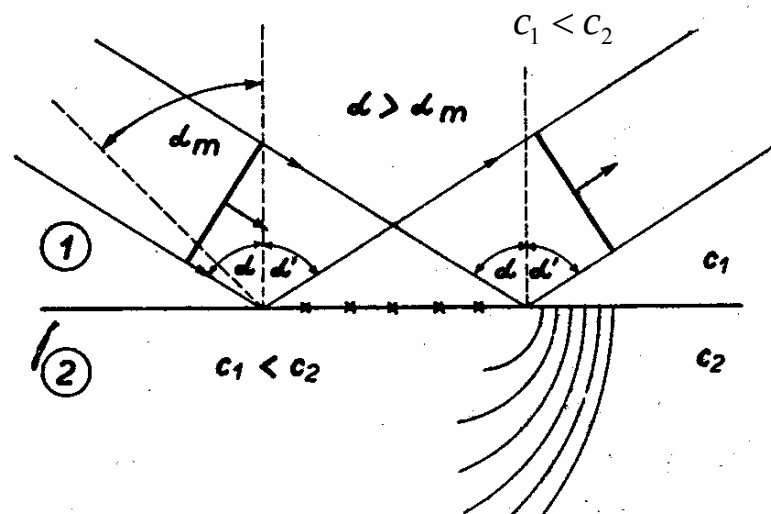
$$\downarrow$$
$$\frac{\sin \beta}{\sin \alpha} = \frac{c_2}{c_1} > 1$$

mezní (kritický) úhel:

$$\sin \alpha_m = \frac{c_1}{c_2} = n_{12}$$



nenastává lom vlnění,
dopadající vlna se totálně odráží
na rozhraní



Příklad: (odraz zvukových vln na hladině jezera)

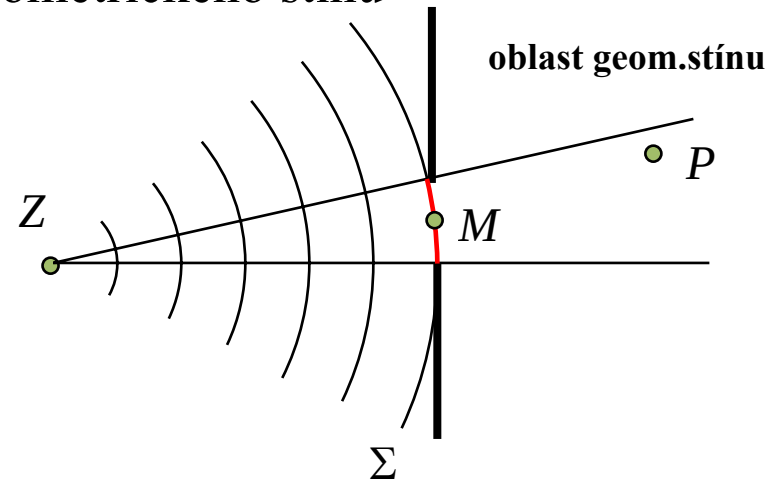
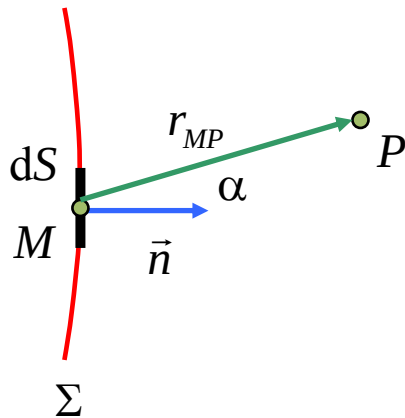
$$\left. \begin{array}{l} c_1 = 340 \text{ m/s} \\ c_2 = 1450 \text{ m/s} \end{array} \right\} \longrightarrow \alpha_m = \arcsin \frac{c_1}{c_2} = 13^\circ 30'$$

téměř všechno šikmo
dopadající vlnění se totálně
odráží a nad hladinou se tedy
šíří velmi dobře zvuk

Vlastnosti vlnění

⊕ Difrakce (ohyb) vlnění:

- odchylky od přímočarého šíření vlnění
- difrakci lze pozorovat na překážkách v cestě šíření vln
- vlnění proniká i do oblasti tzv. geometrického stínu



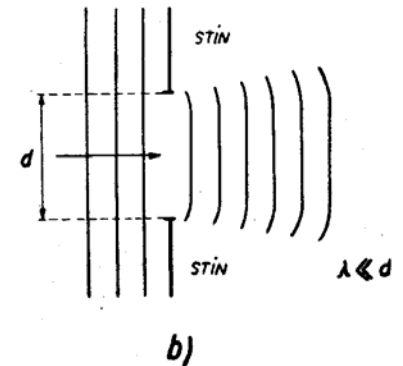
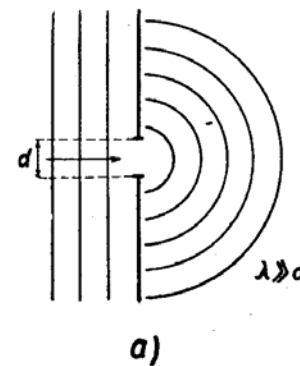
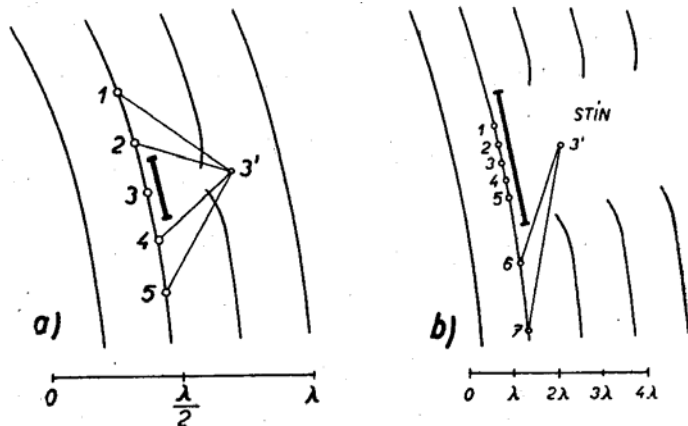
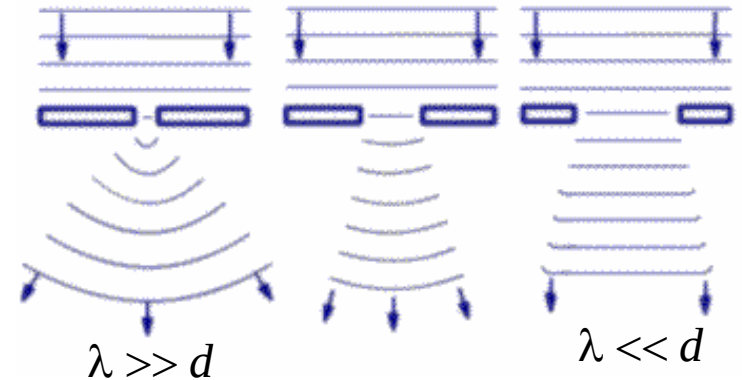
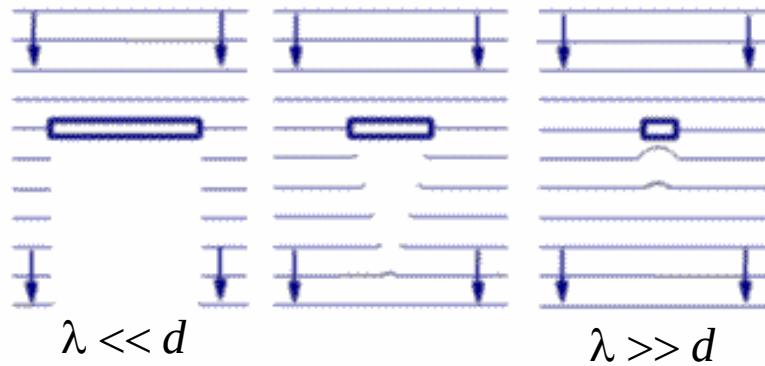
Amplituda vlnění v bodě P

$$U(P) = K \int_S U(M) \frac{e^{ikr_{MP}}}{r_{MP}} \cos \alpha \cdot dS$$

Vlastnosti vlnění

Difrakce vlnění

- **ohyb vlnění** (difrakce) se projeví více, jestliže bude překážka v cestě šíření vlnění rozměrově srovnatelná s vlnovou délkou λ



Vlastnosti vlnění

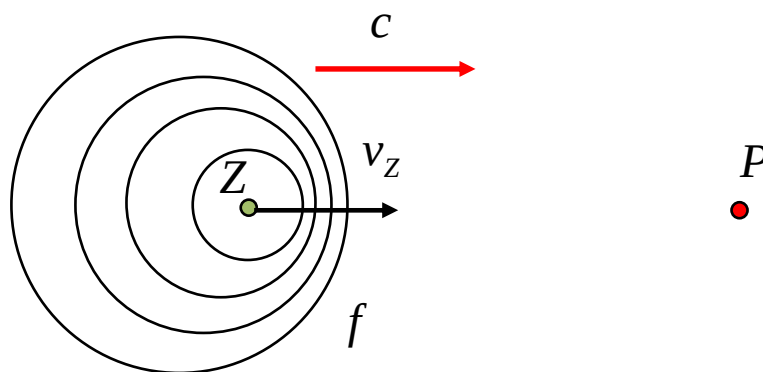
⊕ Dopplerův jev:

Pokud se oscilátor, který je zdrojem vlnění, a pozorovatel vůči sobě pohybují, potom při vzájemném přibližování je frekvence přijímaného vlnění vyšší a při vzdalování nižší.



- budeme předpokládat, že prostředí je v klidu (nemá vliv na vnímanou frekvenci)

a) pohyb zdroje, pozorovatel v klidu



nastává zhuštění vln

Vlnová délka:

$$\Delta\lambda = v_z T = \frac{v_z}{f}$$

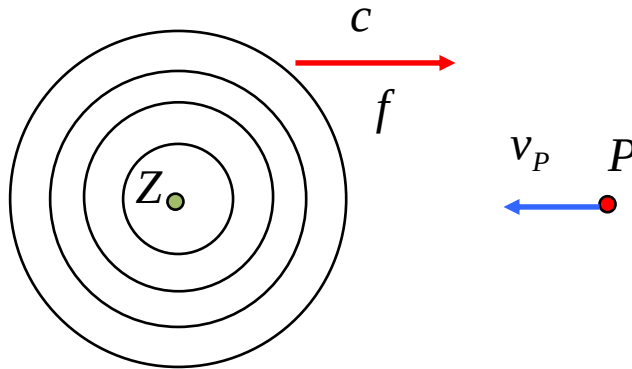
$$\lambda' = \lambda - \Delta\lambda = \frac{c - v_z}{f}$$

Vnímaná frekvence vlnění:

$$f' = \frac{c}{\lambda'} = \frac{c}{\lambda - \Delta\lambda} = f \frac{c}{c - v_z}$$

Vlastnosti vlnění

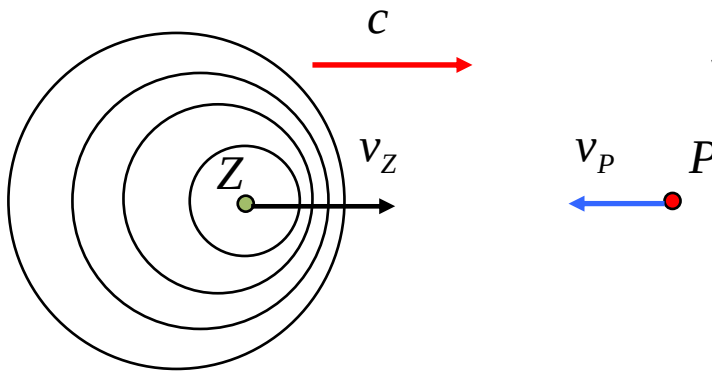
b) pohyb pozorovatele, zdroj v klidu



Vnímaná frekvence vlnění:

$$f' = \frac{c + v_P}{\lambda} = f \frac{c + v_P}{c}$$

c) pohyb pozorovatele i zdroje



Vnímaná frekvence vlnění:

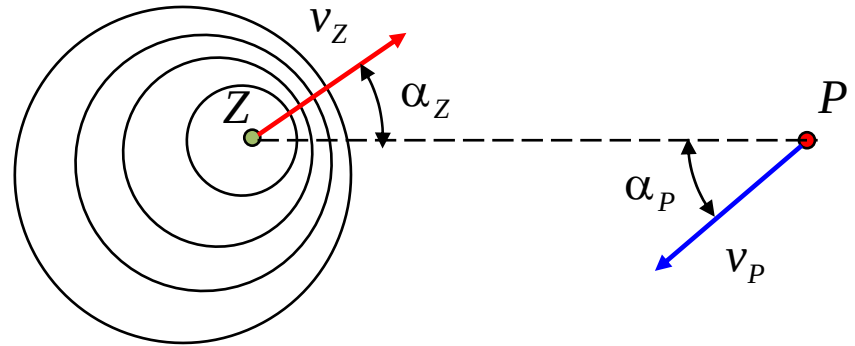
$$f' = \frac{c + v_P}{\lambda - \Delta\lambda} = f \frac{c + v_P}{c - v_Z}$$

rychlosti jsou kladné v tom případě, když se zdroj a pozorovatel vzájemně přibližují

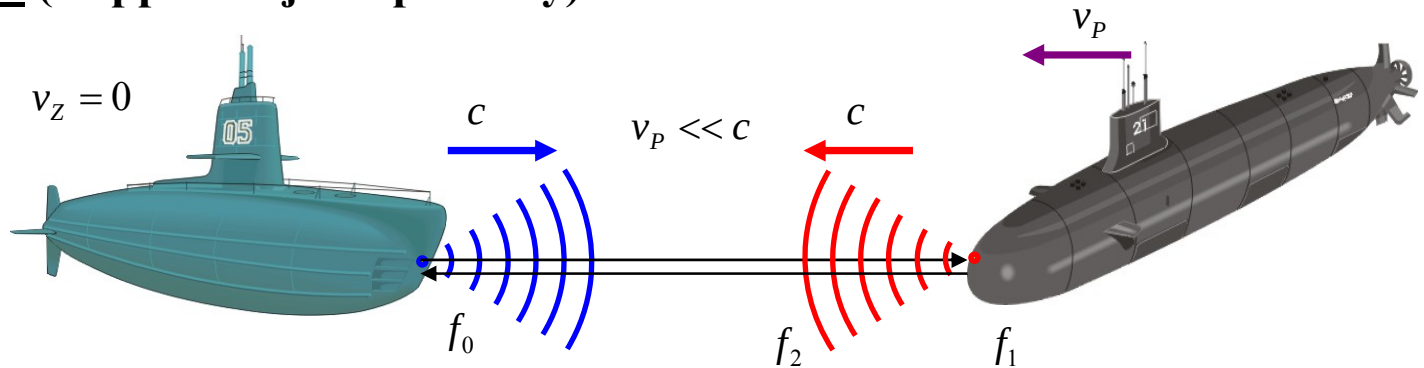
Vlastnosti vlnění

- obecně platí:

$$f' = f \frac{c + v_P \cos \alpha_P}{c - v_Z \cos \alpha_Z}$$



Příklad: (Dopplerův jev – ponorky)



$$f_2 = f_1 \frac{c}{c - v_P \cos \alpha_P} = f_0 \frac{c + v_P \cos \alpha_P}{c - v_P \cos \alpha_P} \approx f_0 \left(1 + \frac{v_P \cos \alpha_P}{c} \right)^2 \approx f_0 \left(1 + \frac{2v_P \cos \alpha_P}{c} \right)$$

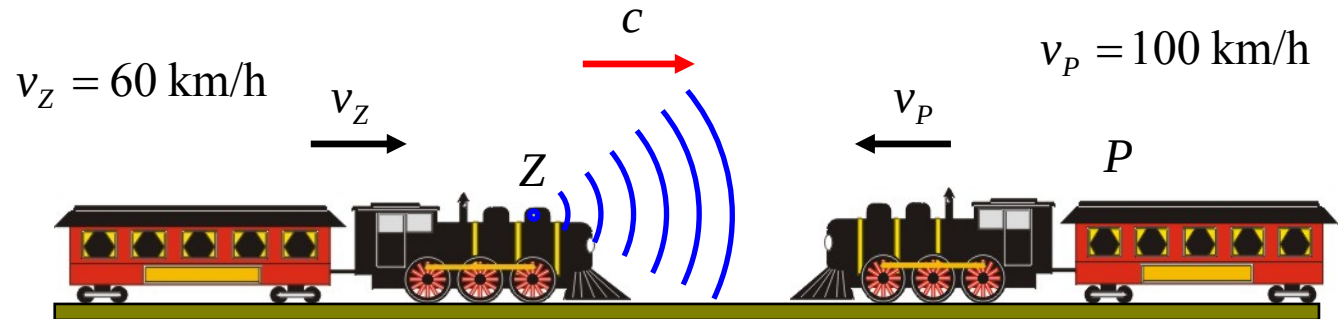
Dopplerův posuv frekvence f_D :

$$f_D = f_0 \frac{2v_P \cos \alpha_P}{c}$$

Vlastnosti vlnění

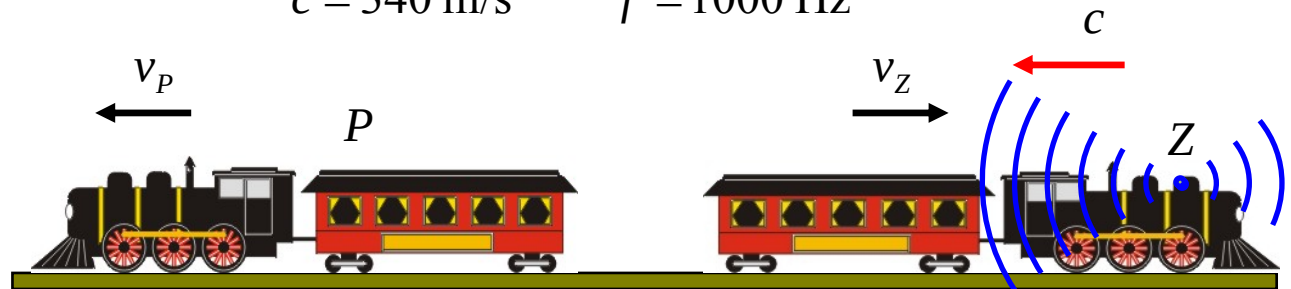
Příklad: (Dopplerův jev – míjející se vlaky)

1



$$c = 340 \text{ m/s} \quad f = 1000 \text{ Hz}$$

2



$$f'_1 = f \frac{c + v_P}{c - v_Z} \doteq 1137 \text{ Hz}$$

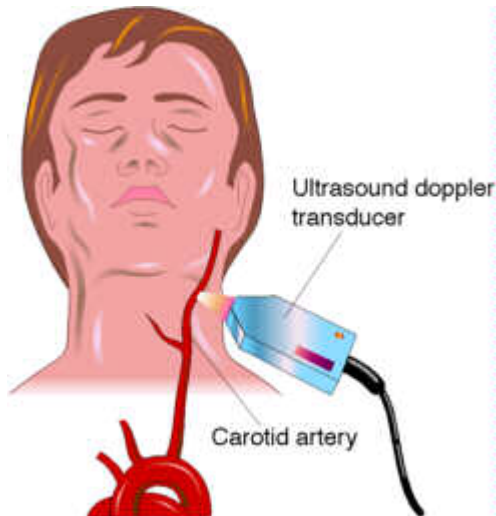
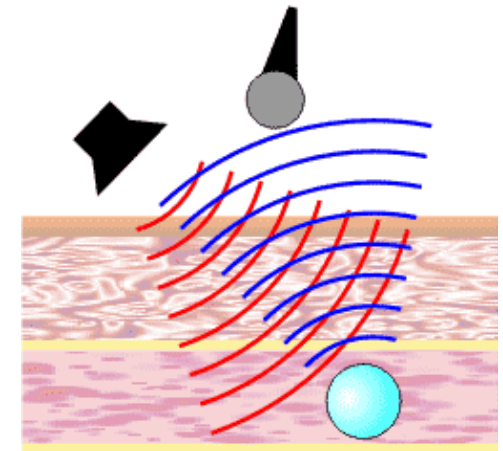
$$f'_2 = f \frac{c - v_P}{c + v_Z} \doteq 875 \text{ Hz}$$

Vlastnosti vlnění

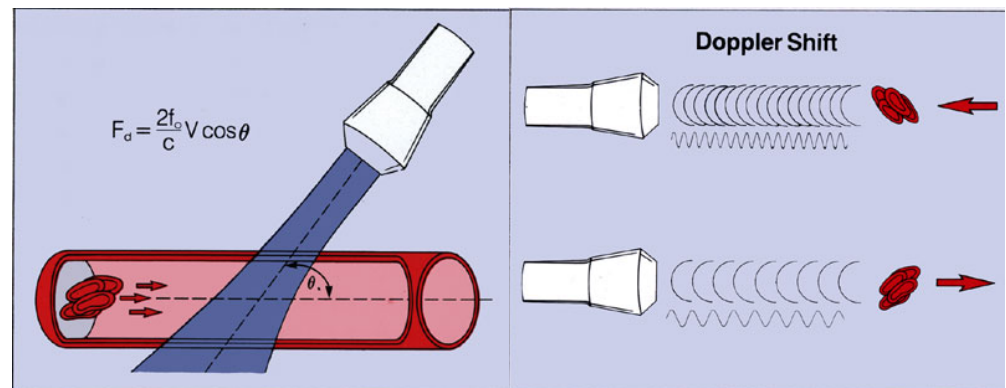
Aplikace Dopplerova jevu:

- Dopplerův jev má široké spektrum aplikací jak pro mechanické tak pro elektromagnetické vlnění

- ⊕ měření vibrací konstrukcí (akustické, optické)
- ⊕ měření rychlosti, rychlosti proudění
- ⊕ Dopplerovský radar (metrologie, policie)
- ⊕ Dopplerovský sonar
- ⊕ Dopplerovská ultrasonografie,...

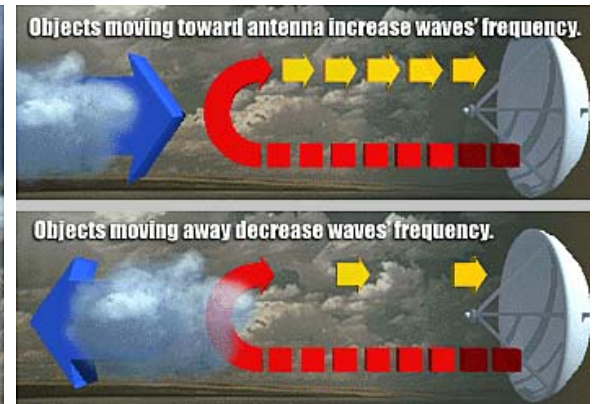
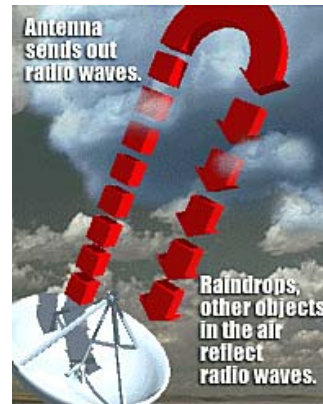
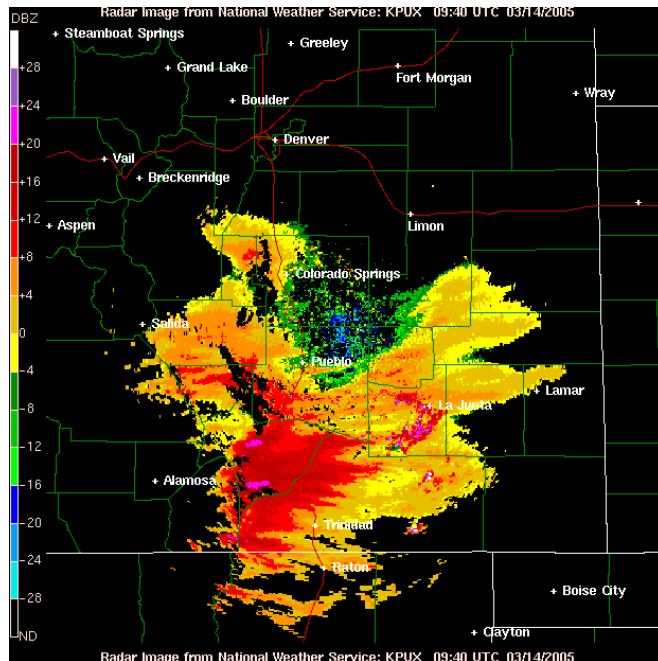


Dopplerovská sonografie



Vlastnosti vlnění

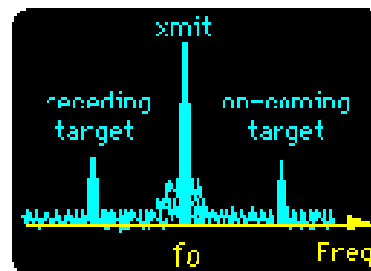
Další aplikace Dopplerova jevu:



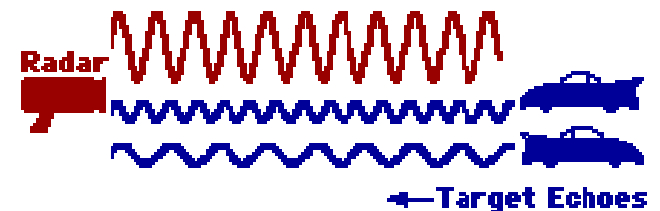
Dopplerovský radar

$$f_D = \pm 2vf_0 / c$$

$$v = \pm cf_D / 2f_0$$



Transmit Signal →



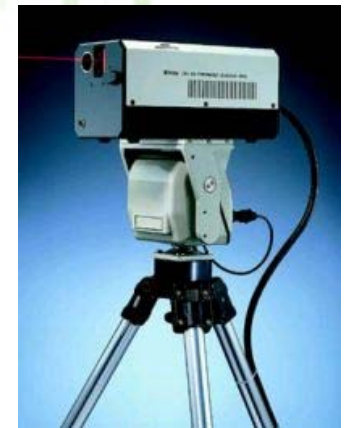
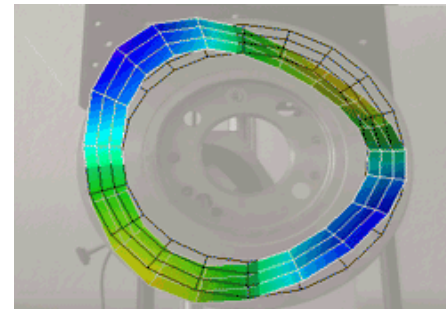
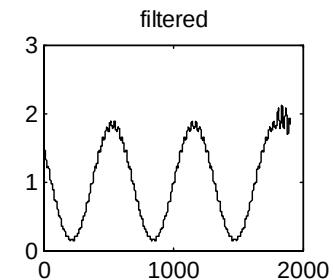
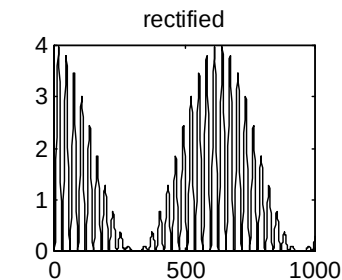
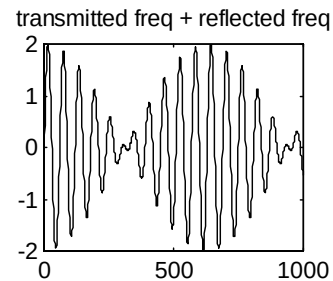
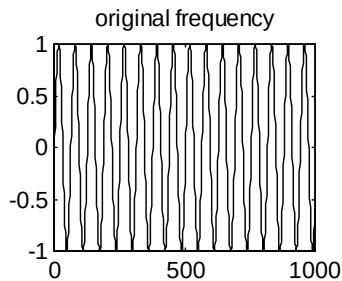
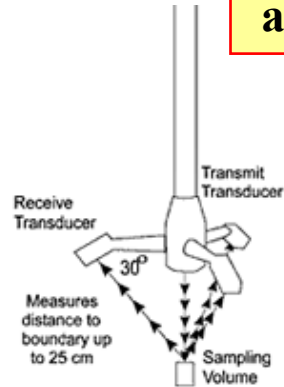
Vlastnosti vlnění

Dopplerovské měření rychlostí proudění a vibrací

akustické

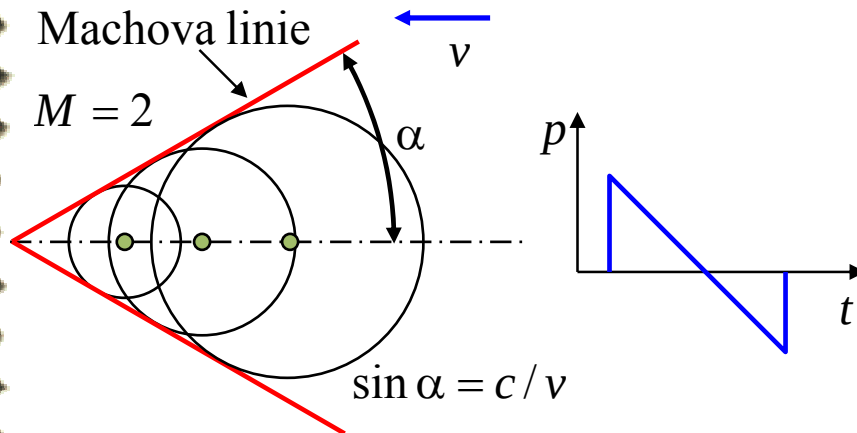
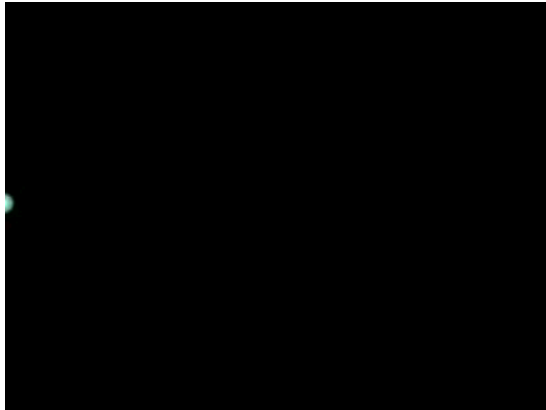


Dopplerovská laserová
velocimetrie a vibrometrie



Vlastnosti vlnění

Rázová vlna:



dochází ke skokové změně (poruše, rázu) hustoty a tlaku – vzniká **rázová vlna**, která se šíří prostředím



Machovo číslo: $M = v/c$

Vlnění v elastickém materiálu

⊕ **Šíření rovinné podélné vlny** ve směru osy x v elastickém materiálu:

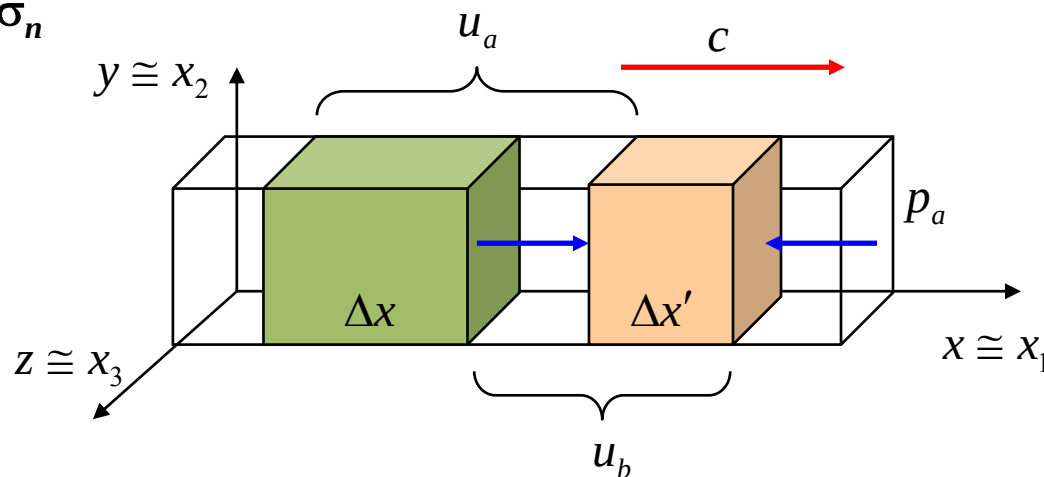
- kmitání částic prostředí ve směru šíření vlny s různými fázemi v různých bodech
- nastává zhušťování a zředňování (změny objemu elementů ve směru osy x)
- poměrné změně délky objemového elementu ΔV přísluší **přídavný tlak p_a** resp. **normálové napětí σ_n**

Kapaliny, plyny

$$p_a = -K \frac{\Delta V}{V} = -K \frac{\partial u}{\partial x}$$

Pevné látky (tyč)

$$\sigma_n = E\varepsilon = E \frac{\partial u}{\partial x}$$



$$\varepsilon = \frac{\Delta x' - \Delta x}{\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} \longrightarrow \varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{S\Delta u}{S\Delta x} = \frac{\Delta u}{\Delta x} \longrightarrow \frac{\Delta V}{V} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

Vlnění v elastickém materiálu

⊕ podélná vlna v ideální tekutině ($G = 0$, $\sigma_{ij} = 0$), šířící se ve směru osy x_1

$$\vec{u} = \vec{u}(x_1, t)$$

Výchylka:

$$\vec{u} = \vec{i}u_1 + \vec{j}u_2 + \vec{k}u_3 = \vec{u}_L + \vec{u}_T$$

zanedbáme
objemové síly $\vec{f}_o \doteq 0$

Pohybová rovnice:

$$\rho \vec{a} = \vec{f}_E + \vec{f}_o$$



$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$$

$$p = -K \frac{dV}{V} = -K\vartheta = -K \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{kk}$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \neq 0, \quad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} = 0, \quad \varepsilon_{33} = \frac{\partial u_3}{\partial x_3} = 0$$

$$p = -\sigma_{kk} = -K\varepsilon_{11} = -K \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \quad k = 1, 2, 3$$

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} = \frac{K}{\rho} \cdot \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}$$

vlnová rovnice

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} = \frac{1}{c_L^2} \cdot \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2}$$

$$c_L = \sqrt{\frac{K}{\rho}}$$

Vlnění v elastickém materiálu

- ⊕ elastickými materiály se mohou šířit jak **podélné (tlakové) vlny**, tak **příčné (smykové) vlny**.

Výchylka:

$$\vec{u} = \vec{i}u_1 + \vec{j}u_2 + \vec{k}u_3 = \vec{u}_L + \vec{u}_T$$

zanedbáme
objemové síly $\vec{f}_O \doteq 0$

Pohybová rovnice:

$$\rho \vec{a} = \vec{f}_E + \vec{f}_O$$



$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$$

- pro **vnitřní napětí** σ_{ij} platí podle Hookeova zákona:

$$\sigma_{11} = \frac{E}{1+\nu} \left[\varepsilon_{11} + \frac{\nu}{1-2\nu} \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{kk} \right]$$

$$\sigma_{12} = G\gamma_{12} = 2G\varepsilon_{12}$$

$$\sigma_{13} = G\gamma_{13} = 2G\varepsilon_{13}$$

- uvažujme šíření rovinné vlny ve směru x_1 :

$$\vec{u} = \vec{u}(x_1, t)$$

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)$$

$$\sigma_{ik} = -\sigma_{ki}$$

Vlnění v elastickém materiálu

Šíření rovinné vlny v elastickém materiálu

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} = \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \longrightarrow$$

**Podélné
vlnění**

$$c_L = \sqrt{\frac{E(1-\nu)}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)}}$$

$$\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} = G \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} = \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} = G \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} = \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2}$$

Příčné vlnění

$$c_T = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$$

$$c_L > c_T$$

vlnová rovnice

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_1^2} = \frac{1}{c^2} \cdot \frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2}$$

**Pro šíření podélných vln v
tenké tyči**

$$c_L \doteq \sqrt{E/\rho}$$

Tekutiny (kapaliny, plyny)

- šíří se prakticky pouze podélné vlny

$$G \doteq 0 \longrightarrow$$

$$c_L = \sqrt{\frac{K}{\rho}}$$

kapaliny

$$c_L = \sqrt{\kappa \frac{p}{\rho}}$$

plyny

Vlnění v elastickém materiálu

rychlost šíření vln v materiálech

Materiál	Fázová rychlost c_L [m/s]	Fázová rychlost c_P [m/s]
ocel	5900-6000	3260
hliník	6320	3080
sklo	5570	3515
dřevo	4300	900
beton	5400	3400
rtuť	1450	-
voda	1480	-
vzduch (20°C)	340	-
vzduch (0°C)	331,8	-

suchý vzduch:

$$c_L \doteq (331,82 + 0,61t) \text{ m/s}$$

Vlastnosti vlnění

**vlnění přenáší energii
prostorem !!!**

⊕ **Zářivý tok (tok energie):**

- energie, která projde plochou za čas dt

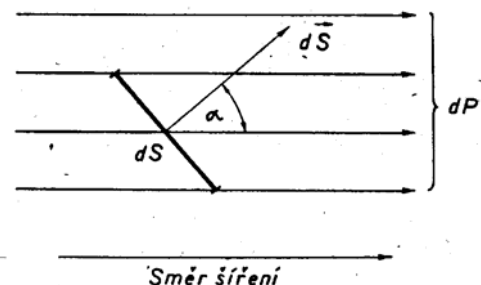
⊕ **Objemová hustota energie:**

⊕ **Proudová hustota energie:**

- energie, která za jednotku času projde
jednotkovou plochou kolmou ke směru šíření
vlny

⊕ **Intenzita vlnění:**

- časová střední hodnota proudové hustoty energie



$$P = \frac{dW}{dt} \quad [\text{W}]$$

$$w = \frac{dW}{dV} \quad [\text{J/m}^3]$$

$$j = \frac{dP}{dS_{\perp}} \quad [\text{W/m}^2]$$

$$j = \frac{dW}{dS_{\perp} dt} = c \frac{dW}{dV} = cw$$

$$I = \langle j \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T j dt \quad [\text{W/m}^2]$$

Vlastnosti vlnění

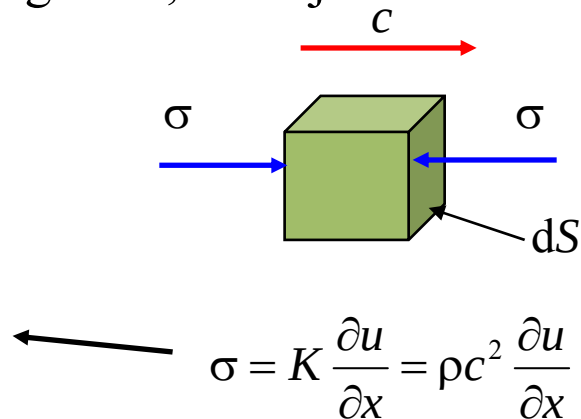
Energie přenášená mechanickým vlněním:

- ⊕ na deformaci objemu dV je nutné vydat energii dW , která je spotřebována na práci dA

$$dA = \sigma dS du$$

• Objemová hustota mech.energie vlnění:

$$w = \frac{dW}{dV} = \frac{dA}{dV} = \frac{\sigma dS du}{dS dx} = \sigma \frac{\partial u}{\partial x} = \rho c^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2$$



$$w = \rho \omega^2 u_0^2 \cos[\omega(t - x/c)] \quad \leftarrow u(x, t) = u_0 \sin[\omega(t - x/c)]$$

• Intenzita vlnění:

$$I = \langle j \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T j dt = \frac{1}{T} \int_0^T w \cdot c dt = \frac{1}{T} \int_0^T \rho c \omega^2 u_0^2 \cos^2[\omega(t - x/c)] dt = \frac{1}{2} \rho c \omega^2 u_0^2$$

- mechanická energie, kterou vlna za časovou jednotku přenese přes jednotkovou plochu kolmou ke směru šíření vlny

$$I = \frac{1}{2} \rho c \omega^2 u_0^2$$

Vlastnosti vlnění

⊕ Intenzita vlnění kulových vln:

⊕ zářivý tok prošlý plochou $S_{\perp}$: $P = IS_{\perp}$

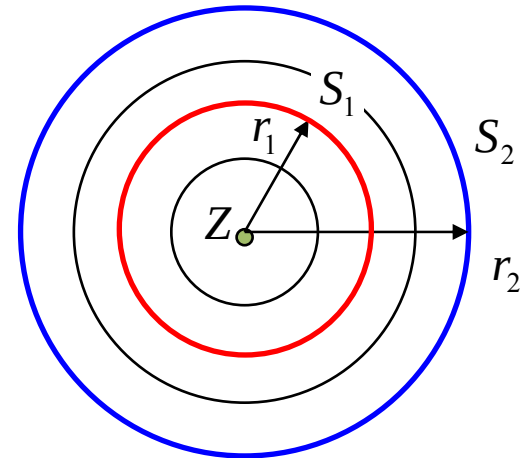
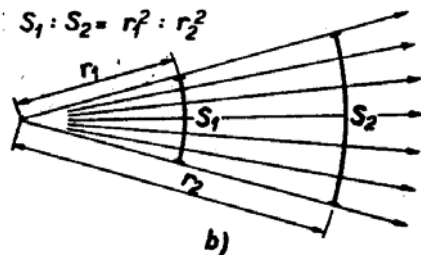
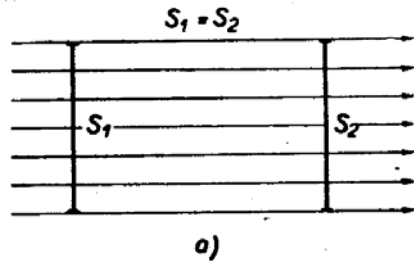
$$I_1 = \frac{P}{S_1}$$

$$S_1 = 4\pi r_1^2$$

$$S_2 = 4\pi r_2^2$$

$$I_2 = \frac{P}{S_2}$$

$$\frac{I_2}{I_1} = \frac{S_1}{S_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2}$$



**intenzita kulové vlny ubývá
se čtvercem vzdálenosti**

Válcové vlny:

⊕ šíří se radiálním směrem od zdroje

$$u(r) = \frac{A}{\sqrt{r}} \sin(\omega t - kr + \varphi)$$

Vlastnosti vlnění

Příklad: (detonační vlna)

- určete intenzitu kulově symetrické detonační vlny s tlakovou energií výbuchu $W=10^{10}$ J ve vzdálenosti 1, 10 a 20 km od výbuchu (exploze trvala $\Delta t=1,5$ s)

Intenzita sférické vlny:

$$I = \frac{P}{S} = \frac{E}{4\pi R^2 \Delta t}$$

$$R_1 = 1 \text{ km} \Rightarrow I_1 = 531 \text{ W/m}^2$$

$$R_2 = 10 \text{ km} \Rightarrow I_2 = 5,31 \text{ W/m}^2$$

$$R_3 = 20 \text{ km} \Rightarrow I_3 = 1,3 \text{ W/m}^2$$



Vlastnosti vlnění

Grupová rychlost:

- ⊕ fázová rychlost závisí na frekvenci (popř. vlnové délce)
- ⊕ uvažujme případ interference 2 harmonických vln s různými, ale málo odlišnými frekvencemi a vlnovými délkami

$$u_1 = u_0 \cos[\omega_1 t - k_1 x]$$

$$u_2 = u_0 \cos[\omega_2 t - k_2 x]$$

$$u = u_1 + u_2 = 2u_0 \cos\left[\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t - \frac{k_2 - k_1}{2}x\right] \cos\left[\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t - \frac{k_1 + k_2}{2}x\right]$$

$$\omega_2 = \omega_1 + \Delta\omega = \omega + \Delta\omega$$

$$k_2 = k_1 + \Delta k = k + \Delta k$$

disperzní prostředí

$$\omega = \omega(k) \quad \Rightarrow \quad \Delta\omega \doteq \frac{d\omega}{dk} \Delta k$$

$$u \cong 2u_0 \cos\left[\frac{\Delta\omega}{2}t - \frac{\Delta k}{2}x\right] \cos[\omega t - kx] = 2u_0 \cos\left[\left(\frac{d\omega}{dk}t - x\right)\frac{\Delta k}{2}\right] \cos[\omega t - kx]$$

Amplituda vlny $A(x, t)$

Vlastnosti vlnění

grupová rychlost:

$$v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

Vzniká postupná vlna s amplitudou $A(x,t)$ periodicky závislou na souřadnici a čase

fázová rychlost:

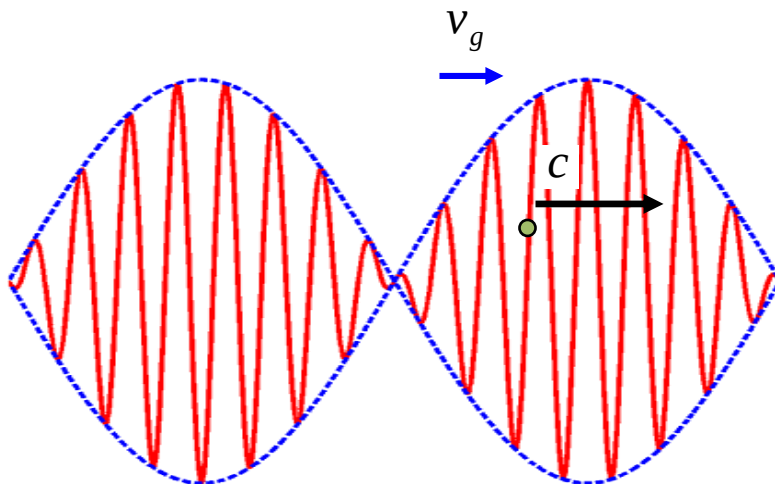
$$c = \frac{\omega}{k}$$

$$u \cong A(x,t) \cos[\omega t - kx]$$



$$A(x,t) = 2u_0 \cos\left[\left(v_g t - x\right) \frac{\Delta k}{2}\right]$$

- ⊕ místa stejné fáze se šíří **fázovou rychlostí**
- ⊕ vlna je rozdělena na jednotlivé grupy (vlnové balíky), které se šíří tzv. **grupovou rychlostí**



V disperzním prostředí bude grupová rychlost odlišná od fázové rychlosti !!!

- může mít i opačný směr

$I \sim A^2 \Rightarrow$ energie vlny se šíří grupovou rychlostí !!!

Vlastnosti vlnění

Příklady vln:

Vlny na mělké vodě

$$c = v_g = \sqrt{gh} \quad \rightarrow$$

nedochází
k disperzi

Tsunami

- ⊕ fázová rychlost nezávisí na vlnové délce
- ⊕ vlnová délka několik desítek kilometrů

$h \doteq 5 \text{ km}$ - hloubka oceánu



$$c = v_g = \sqrt{gh} \doteq 800 \text{ km/h}$$

