

Mechanika soustavy hmotných bodů

⊕ model soustavy hmotných bodů:

- systém vytvořený n hmotnými body
- hmotný bod α ($\alpha = 1, 2, \dots, n$) má pak hmotnost m_α , polohu r_α , rychlost v_α

Dva druhy sil (z hlediska soustavy):

1) **Vnější síly** F_α , které mají svoje centrum mimo soustavu

2) **Vnitřní (interakční) síly** $F_{\beta\alpha}$, které reprezentují vzájemné působení mezi jednotlivými hmotnými body soustavy. Řídí zákonem akce a reakce

$$\vec{F}_{\beta\alpha} = -\vec{F}_{\alpha\beta} \quad \longrightarrow \quad \vec{F}_{\alpha\alpha} = 0$$

centrální síly

Pohybová rovnice 1 hm.bodu soustavy:

$$\frac{d\vec{p}_\alpha}{dt} = m_\alpha \frac{d^2\vec{r}_\alpha}{dt^2} = \vec{F}_\alpha + \sum_{\beta=1}^n \vec{F}_{\beta\alpha}$$

V extrémním případě
 $6n$ stupňů volnosti (tj.
 $6n$ pohybových rovnic

Mechanika tuhého tělesa

- ⊕ variabilita pohybových stavů jednotlivých bodů soustavy je často omezena jistým počtem **vazeb**

⊕ tuhé těleso

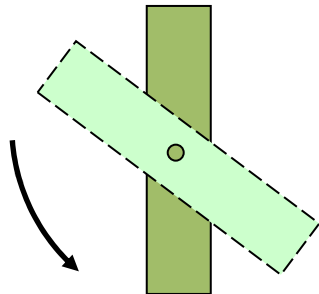
- soustava hmotných bodů, které **nemění vzájemnou vzdálenost (nedeformovatelný materiál)**
- 6 stupňů volnosti →

2 vektorové rovnice
+12 podmínek

2 impulzové
věty

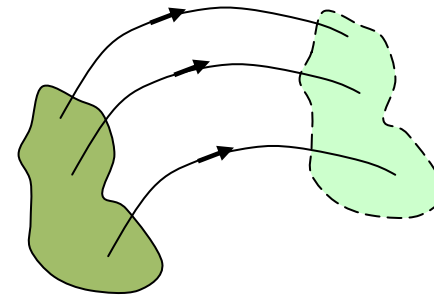
Hmotné body mohou konat dva **základní typy pohybů**:

- pohyb **translační** (postupný)
- pohyb **rotační** (otáčivý).



rotace

- rotace kolem pevné osy
- rotace kolem okamžité osy



translace

$\vec{v} = \text{konst.}$
 $\vec{a} = \text{konst.}$

stačí
sledovat
pohyb 1
bodu

Mechanika tuhého tělesa

Popis translačního pohybu:

translace

- ⊕ translaci můžeme sledovat prostřednictvím pohybu jediného hmotného bodu – **těžiště** (3 stupně volnosti)

Těžiště = je fiktivní hmotný bod, jehož hmotnost je rovna celkové hmotnosti tuhého tělesa a jehož hybnost je rovna celkové hybnosti tuhého tělesa.

hmotnost

$$m_T = \sum_{\alpha} m_{\alpha}$$

hybnost

$$\vec{p}_T = \sum_{\alpha} \vec{p}_{\alpha}$$

- platí tedy:

$$m_T \vec{v}_T = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha}$$



$$m_T \frac{d\vec{r}_T}{dt} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \frac{d\vec{r}_{\alpha}}{dt}$$

- rychlost těžiště:

$$\vec{v}_T = \frac{1}{m_T} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha}$$



- poloha těžiště:

$$\vec{r}_T = \frac{1}{m_T} \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{r}_{\alpha}$$



$$m_T \vec{r}_T = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{r}_{\alpha}$$

- Poloha těžiště má mimořádný význam pro tzv. **stabilní (labilní) rovnováhu** těles

Mechanika tuhého tělesa

- ⊕ Vzhledem k **vysoké hustotě rozložení** a **malé velikosti molekul** pevných, kapalných a plyných látek **je možno uvažovat s představou spojitého rozložení látky** v prostoru:
- ⊕ možnost vyjádření vlastností látek spojitými funkcemi polohy a času

Hustota tělesa

$$\rho(\vec{r}) = \frac{dm}{dV}$$

Hmotnost tělesa

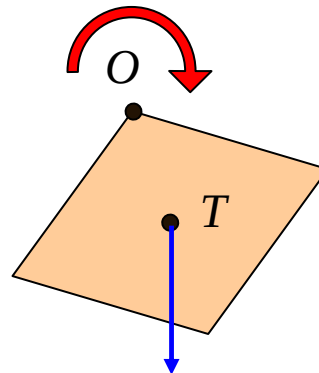
$$m = \int_V \rho(\vec{r}) dV$$

Těžiště tělesa

$$\vec{r}_T = \frac{\int_V \rho(\vec{r}) \vec{r} dV}{\int_V \rho(\vec{r}) dV}$$

stabilita těles:

tělesa se snaží zaujmout pozici, kdy je potenciální energie minimální



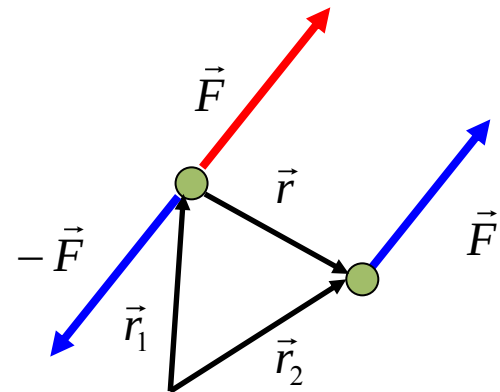
Stabilní rovnováha nastává pokud při malém vychýlení z rovnovážné polohy se těleso do ní opět vrací

Mechanika tuhého tělesa

⊕ Redukce sil k bodu:

- v tuhém tělese můžeme každou sílu posunout do libovolného bodu, připojíme-li doplňkovou dvojici sil, její moment $\vec{M}$ je roven momentu původní síly vzhledem k novému působišti

$$\vec{M} = \vec{r}_1 \times (-\vec{F}) + \vec{r}_2 \times \vec{F} = \vec{r} \times \vec{F}$$



⊕ Rovnováha tuhého tělesa:

$$\vec{F} = \sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha} = 0 \quad \vec{M} = \sum_{\alpha} \vec{M}_{\alpha} = 0$$

Mechanika tuhého tělesa

⊕ Pohybová rovnice těžiště při translaci:

$$\sum_{\alpha=1}^n \frac{d\vec{p}_{\alpha}}{dt} = \sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} \frac{d^2 \vec{r}_{\alpha}}{dt^2} = \sum_{\alpha=1}^n \vec{F}_{\alpha} + \sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \vec{F}_{\beta\alpha}$$

$$\sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n \vec{F}_{\beta\alpha} = 0$$

**výslednice interakčních
(vnitřních) sil**

$$\vec{F}_{\beta\alpha} = -\vec{F}_{\alpha\beta}$$

$$\frac{d^2}{dt^2} \left(\sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \right) = \sum_{\alpha=1}^n \vec{F}_{\alpha} = \vec{F}$$

$$\frac{d\vec{p}_T}{dt} = m_T \frac{d^2 \vec{r}_T}{dt^2} = \vec{F}$$

1. impulsová věta

**popisuje pohyb tuhého
tělesa při translaci**

Mechanika tuhého tělesa

Popis rotačního pohybu:

rotace

- ⊕ na rotaci opět připadají **tři stupně volnosti**.
- ⊕ rotační pohyb nastává **otáčením tělesa kolem nějaké osy (okamžité nebo pevné)**

$$\frac{d\vec{L}_\alpha}{dt} = \frac{d}{dt} [\vec{r}_\alpha \times \vec{p}_\alpha] = [\vec{r}_\alpha \times \vec{F}_\alpha] + \sum_{\beta=1}^n [\vec{r}_\alpha \times \vec{F}_{\beta\alpha}]$$

časová změna
momentu hybnosti
1 hmot.bodu

$$\sum_\alpha \frac{d\vec{L}_\alpha}{dt} = \sum_\alpha \vec{M}_\alpha + \sum_\alpha \sum_{\beta=1}^n [\vec{r}_\alpha \times \vec{F}_{\beta\alpha}]$$

celková změna
momentu hybnosti
tělesa

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

2.impulsová věta

celkový moment síly

$$\sum_{\alpha=1}^n \sum_{\beta=1}^n [\vec{r}_\alpha \times \vec{F}_{\beta\alpha}] = 0 \rightarrow \text{platí pro centrální interakční síly}$$

Mechanika tuhého tělesa

⊕ Izolovaná soustava hmotných bodů (těles)

– není vystavena působení vnějších sil nebo výslednice vnějších sil je nulová, tj.

$$\vec{F} = \sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha} = 0$$



$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{0}$$



$$\vec{p} = \text{konst.}$$

$$\vec{v}_T = \text{konst.}$$

**zákon zachování
hybnosti**

$$\vec{M} = \sum_{\alpha} \vec{M}_{\alpha} = 0$$



$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0}$$



$$\vec{L} = \text{konst.}$$

**zákon zachování
momentu hybnosti**

$$W = W_k + W_p = \text{konst.}$$

**zákon zachování
mechanické
energie**

Mechanika tuhého tělesa

⊕ počátek soustavy souřadné zvolíme v těžišti, tj.

$$\vec{r}'_T = 0 \quad \vec{v}'_T = 0 \quad \vec{p}'_T = 0$$

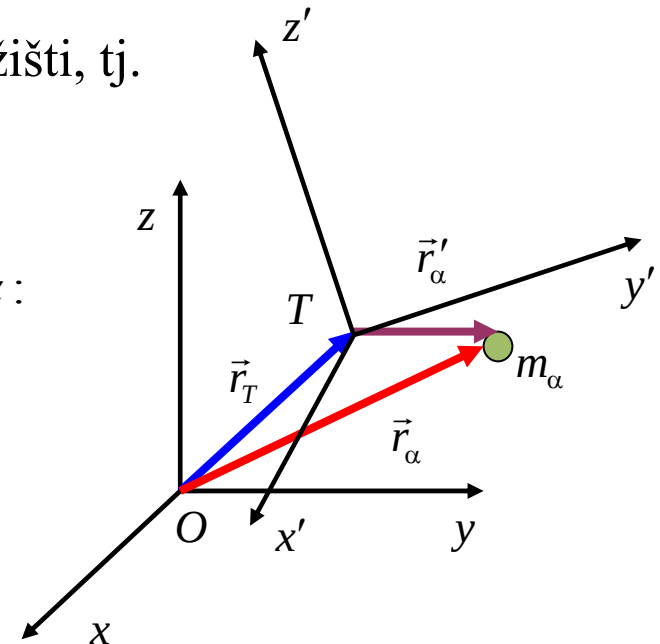
• **polohový vektor a rychlost hmotného bodu α :**

$$\vec{r}_\alpha = \vec{r}'_\alpha + \vec{r}_T \quad \vec{v}_\alpha = \vec{v}'_\alpha + \vec{v}_T$$

• **celkový moment hybnosti:**

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \sum_{\alpha} \vec{L}_{\alpha} = \sum_{\alpha} [(\vec{r}'_{\alpha} + \vec{r}_T) \times m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha}] = \\ &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} [\vec{r}'_{\alpha} \times (\vec{v}'_{\alpha} + \vec{v}_T)] + \sum_{\alpha} [\vec{r}_T \times m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha}] = \\ &= \sum_{\alpha} [\vec{r}'_{\alpha} \times m_{\alpha} \vec{v}'_{\alpha}] + \sum_{\alpha} m_{\alpha} [\vec{r}'_{\alpha} \times \vec{v}_T] + \sum_{\alpha} [\vec{r}_T \times m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha}] \end{aligned}$$

$$\sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{r}'_{\alpha} = \vec{r}'_T \sum_{\alpha} m_{\alpha} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{L} = \vec{L}' + [\vec{r}_T \times \vec{p}_T]}$$



Mechanika tuhého tělesa

• celkový moment síly:

$$\begin{aligned}\vec{M} &= \sum_{\alpha} \vec{M}_{\alpha} = \sum_{\alpha} [\vec{r}_{\alpha} \times \vec{F}_{\alpha}] = \sum_{\alpha} [(\vec{r}_T + \vec{r}'_{\alpha}) \times \vec{F}_{\alpha}] = \\ &= \sum_{\alpha} [\vec{r}_T \times \vec{F}_{\alpha}] + \sum_{\alpha} [\vec{r}'_{\alpha} \times \vec{F}_{\alpha}] = [\vec{r}_T \times \vec{F}] + \vec{M}'\end{aligned}$$

• druhá impulzová věta:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

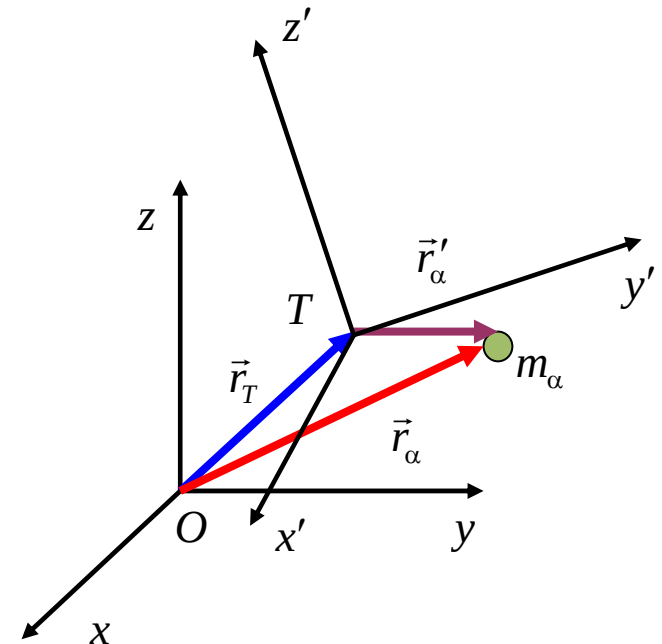
$$\frac{d}{dt} (\vec{L}' + [\vec{r}_T \times \vec{p}_T]) = \vec{M}' + [\vec{r}_T \times \vec{F}]$$



$$\frac{d\vec{L}'}{dt} + [\vec{r}_T \times \vec{F}] = \vec{M}' + [\vec{r}_T \times \vec{F}]$$



$$\frac{d\vec{L}'}{dt} = \vec{M}'$$



Pohybová rovnice vztažená k těžišti, jež je v pohybu v inerciální soustavě. Veličiny (moment síly a hybnosti) jsou vztaženy k těžišti.

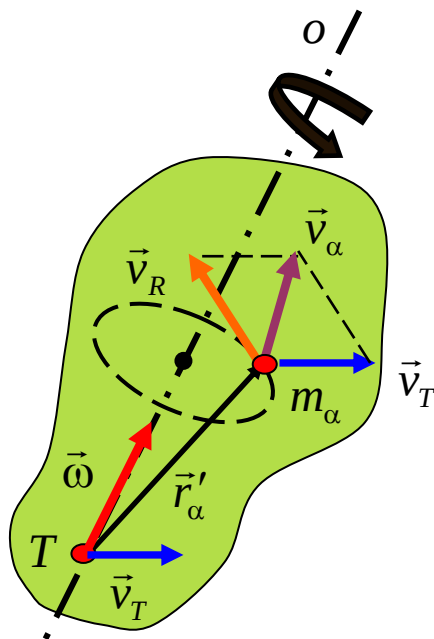
Pohyb tuhého tělesa

⊕ počátek pohyblivého souřadného systému zvolíme v těžišti tuhého tělesa, tj.: $\vec{r}'_T = 0$

⊕ rychlost hmotného bodu soustavy:

⊕ řešením pohyb.rovnic:

$$\vec{v}_T = \vec{v}_T(t) \quad \vec{\omega} = \vec{\omega}(t)$$



$$\vec{v}_\alpha = \vec{v}_T + [\vec{\omega} \times \vec{r}'_\alpha] = \vec{v}_T + \vec{v}_R$$

translační
pohyb těžiště

rotace kolem
těžiště

$$\frac{d\vec{p}_T}{dt} = \vec{F}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$$

pohybové rovnice
tuhého tělesa

Pohyb tuhého tělesa

• Kinetická energie tělesa:

$$W_K = \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} v_{\alpha}^2 = \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} (\vec{v}_T + [\vec{\omega} \times \vec{r}'_{\alpha}])^2$$

$$W_K = \frac{1}{2} \left(\sum_{\alpha} m_{\alpha} \right) v_T^2 + \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} ([\vec{\omega} \times \vec{r}'_{\alpha}])^2 + \underbrace{\vec{v}_T \left[\vec{\omega} \times \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{r}'_{\alpha} \right]}_{=0}$$

$$W_K = \frac{1}{2} m v_T^2 + \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} ([\vec{\omega} \times \vec{r}'_{\alpha}])^2$$

$$W_K = \frac{1}{2} m v_T^2 + \frac{1}{2} \omega^2 \left(\sum_{\alpha} m_{\alpha} d_{\alpha}^2 \right)$$

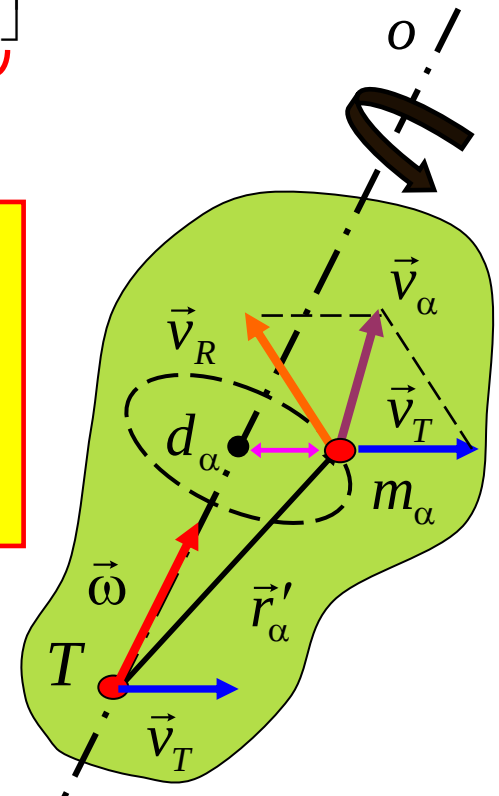
**moment
setrvačnosti
vzhledem k ose
rotace jdoucí
těžištěm**

$$J_T = \sum_{\alpha} m_{\alpha} d_{\alpha}^2$$

**kinet.energie
translačního
pohybu těžiště**

**kinet.energie
rotačního
pohybu**

$$\sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{r}'_{\alpha} = m \vec{r}_T = 0$$



Pohyb tuhého tělesa

⊕ Rotace kolem pevné osy:

$$\vec{v}_T = 0 \quad \vec{\omega} = \text{konst.}$$

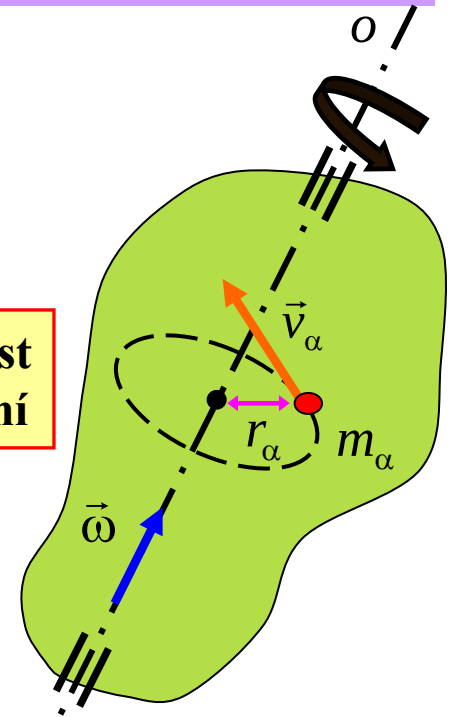
$$W_K = \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} v_{\alpha}^2 = \frac{1}{2} \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\omega \cdot r_{\alpha})^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \sum_{\alpha} m_{\alpha} r_{\alpha}^2$$

• moment setrvačnosti:

$$J = \int_m r^2 dm = \int_V \rho r^2 dV$$

$$J = \sum_{\alpha} m_{\alpha} r_{\alpha}^2$$

r_{α} - vzdálenost
od osy otáčení



• moment hybnosti:

$$\vec{L} = \sum_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \times m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha} = \sum_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \times m_{\alpha} (\vec{\omega} \times \vec{r}_{\alpha}) = \vec{\omega} \sum_{\alpha} m_{\alpha} r_{\alpha}^2 = J \vec{\omega}$$



$$\frac{d\vec{L}}{dt} = J \frac{d\vec{\omega}}{dt} = J \vec{\varepsilon} = \vec{M}$$

osa rotace má
stejný směr jako
moment hybnosti L

Pohyb tuhého tělesa

Moment setrvačnosti vyjadřuje odolnost tělesa vůči změně rotačního pohybu

Moment setrvačnosti charakterizuje rozložení hmoty tělesa kolem osy otáčení

Steinerova věta:

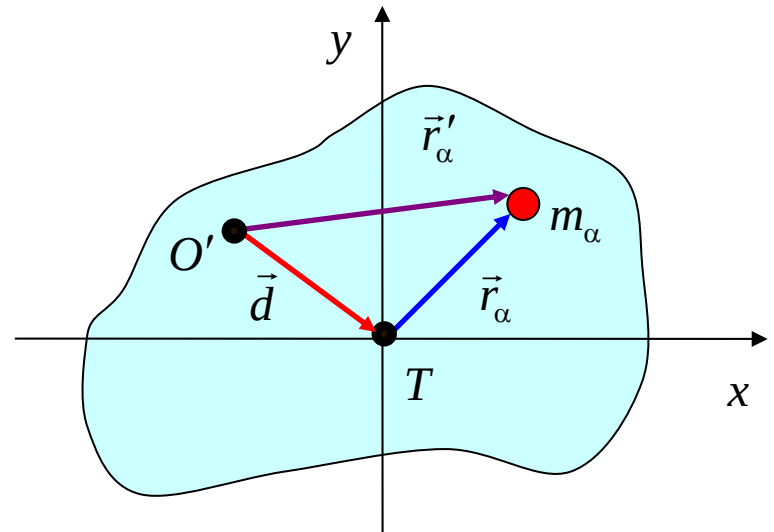
- chceme zjistit moment setrvačnosti vůči rovnoběžné ose vzdálené o d od těžiště

$$\vec{r}'_{\alpha} = \vec{r}_{\alpha} + \vec{d} \quad \longrightarrow \quad J' = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{r}'_{\alpha}{}^2$$

$$J' = \sum_{\alpha} m_{\alpha} (x_{\alpha}^2 + y_{\alpha}^2) + \sum_{\alpha} m_{\alpha} (d_x^2 + d_y^2) + 2d_x \sum_{\alpha} m_{\alpha} x_{\alpha} + 2d_y \sum_{\alpha} m_{\alpha} y_{\alpha}$$



$$J' = J_T + md^2$$



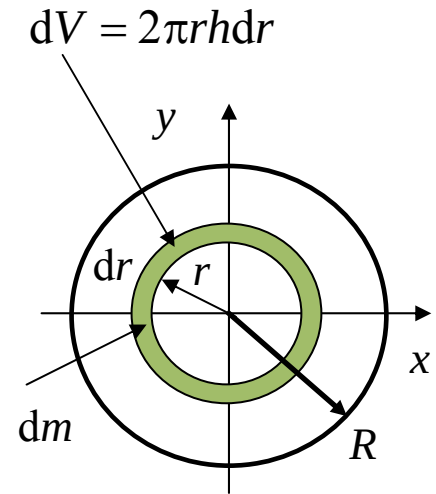
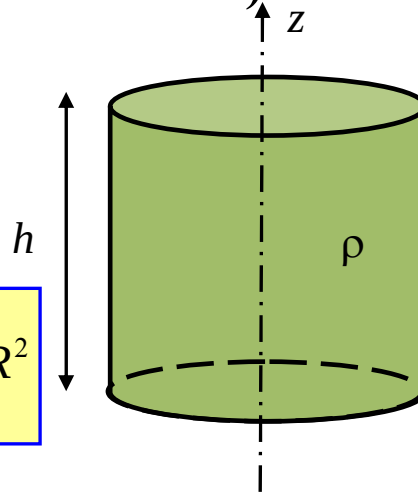
Pohyb tuhého tělesa

⊕ **Příklad: (moment setrvačnosti válce)**

$$J = \int_m r^2 dm = \int_V \rho r^2 dV$$



$$J = \int_0^R 2\pi\rho h r^3 dr = \frac{1}{2} \pi \rho h R^4 = \frac{1}{2} m R^2$$



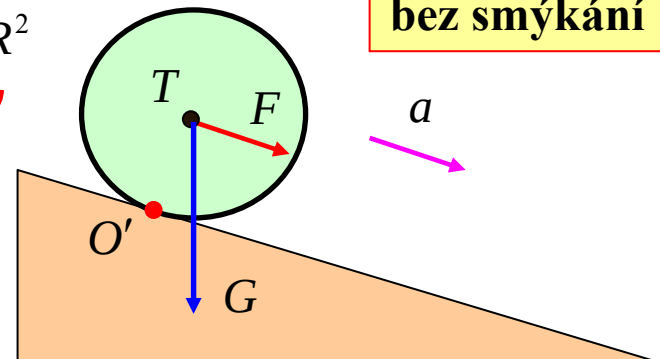
$$J'\varepsilon = M = F \cdot R$$

$$\varepsilon = a / R \quad F = G \sin \alpha \quad J' = J_T + mR^2 = \frac{3}{2} mR^2$$

$$a = \frac{mgR^2 \sin \alpha}{\frac{3}{2} mR^2} = \frac{2}{3} g \sin \alpha$$

Valení válce po nakloněné rovině:

bez smýkání



Pohyb tuhého tělesa

✚ Příklad: (pohyb rumpálu)

$$J\varepsilon = M \quad \varepsilon = a / R \quad M = mgR$$

$$\frac{Ja}{R} = mgR$$

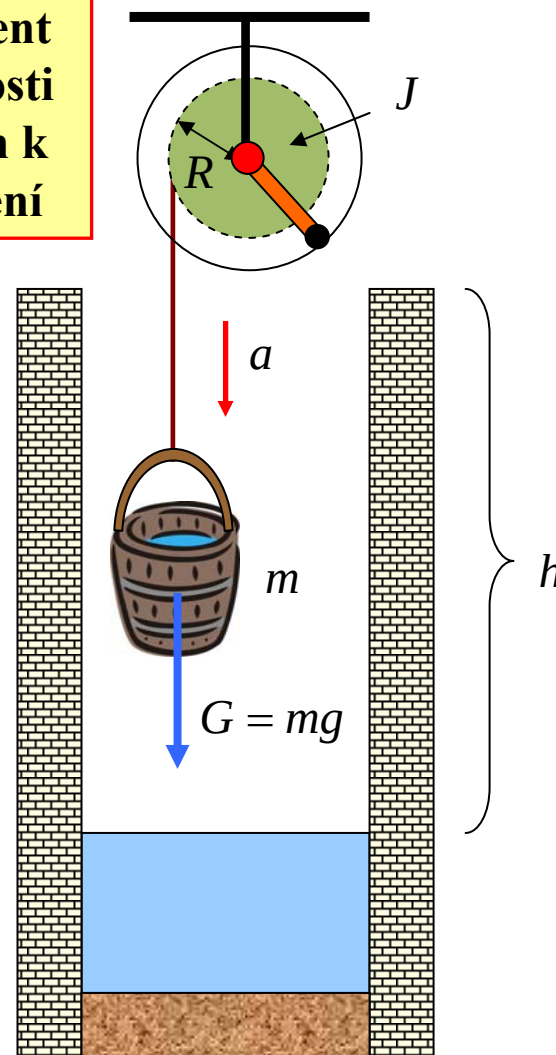


$$a = \frac{mgR^2}{J}$$

J – moment
setrvačnosti
vzhledem k
ose otáčení

Doba pádu do studny

$$t = \sqrt{\frac{2h}{a}} = \sqrt{\frac{2Jh}{mgR^2}}$$



Pohyb tuhého tělesa

Příklad: (pohyb fyzického kyvadla)

- **Pohybová rovnice** tuhého tělesa při rotačním pohybu:

$$M = J\varepsilon = J \frac{d^2\alpha}{dt^2}$$



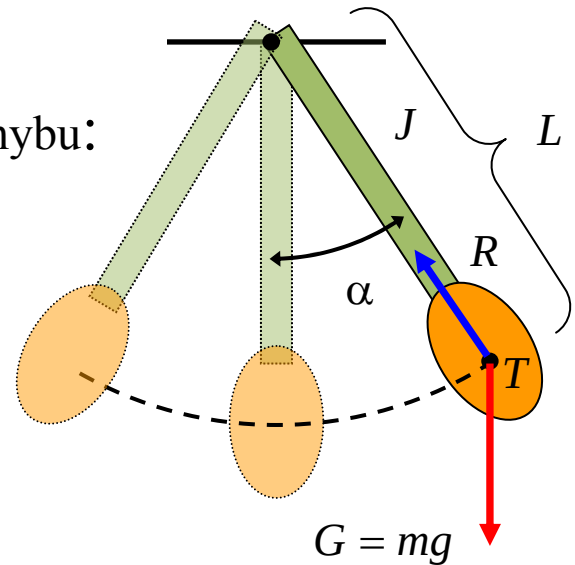
$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{mgL}{J} \sin \alpha = 0$$



$$M = -mgL \sin \alpha$$



moment síly

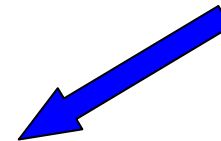


- pokud jsou **výchyšky malé**, tj:

$$\sin \alpha \approx \alpha$$



$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \omega^2 \alpha = 0$$

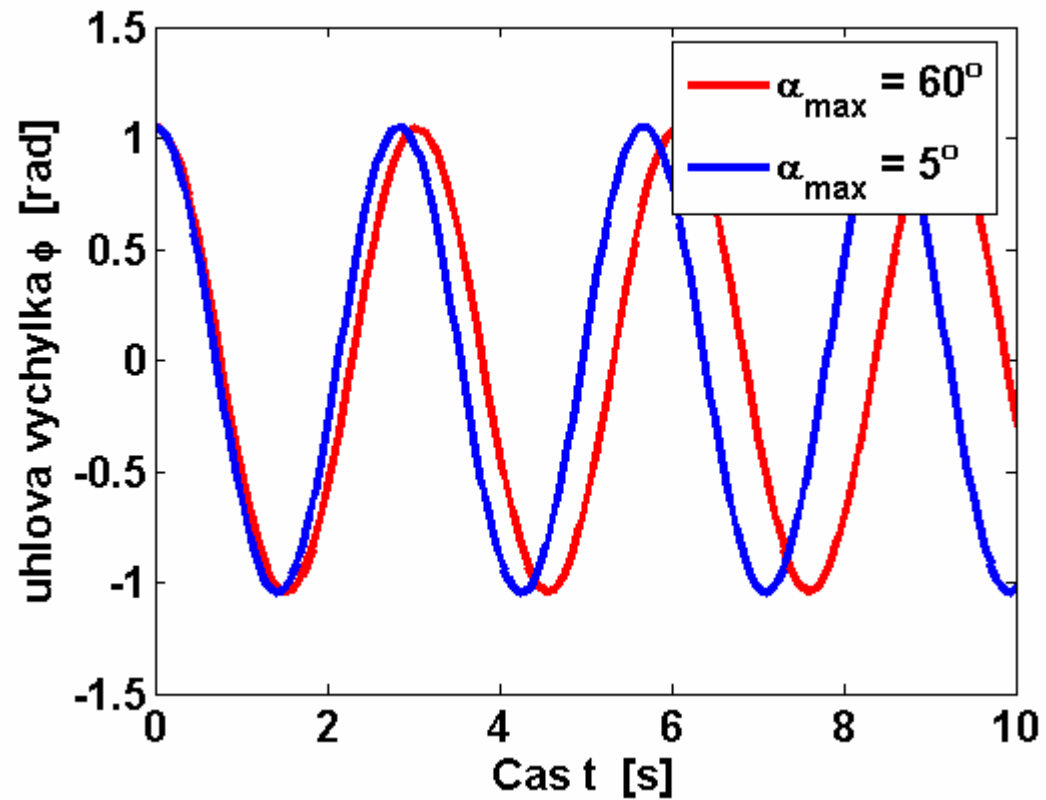


$$\alpha = \alpha_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{mgL}{J}}$$

Pohyb tuhého tělesa

Příklad: (pohyb fyzického kyvadla)



Pohyb tuhého tělesa

⊕ Rotace kolem okamžité osy procházející těžištěm:

$$\vec{v}_T = 0 \quad \vec{\omega} = \vec{\omega}(t)$$

- osy souřadného systému **pevně spojíme s otáčejícím se tělesem** $\vec{r}_T = 0$

• celkový moment hybnosti tuhého tělesa:

$$\begin{aligned} \vec{L} &= \sum_{\alpha} \vec{L}_{\alpha} = \sum_{\alpha} [\vec{r}_{\alpha} \times \vec{p}_{\alpha}] = \sum_{\alpha} [\vec{r}_{\alpha} \times m_{\alpha} \vec{v}_{\alpha}] = & r_{\alpha}^2 &= (x_{\alpha}^2 + y_{\alpha}^2 + z_{\alpha}^2) \\ &= \sum_{\alpha} m_{\alpha} [\vec{r}_{\alpha} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{\alpha})] = \sum_{\alpha} m_{\alpha} [\vec{\omega} r_{\alpha}^2 - \vec{r}_{\alpha} (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_{\alpha})] & \vec{\omega} \cdot \vec{r}_{\alpha} &= \omega_x x_{\alpha} + \omega_y y_{\alpha} + \omega_z z_{\alpha} \end{aligned}$$

$$L_x = \omega_x r_{\alpha}^2 + x_{\alpha} (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_{\alpha}) = \sum_{\alpha} m_{\alpha} [\omega_x (y_{\alpha}^2 + z_{\alpha}^2) - (\omega_y x_{\alpha} y_{\alpha} + \omega_z x_{\alpha} z_{\alpha})]$$

• rovnici lze přepsat jako:

$$\vec{L} = \vec{J} \vec{\omega}$$

tenzor setrvačnosti

$$\vec{J} = \begin{pmatrix} \sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} (y_{\alpha}^2 + z_{\alpha}^2) & -\sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} x_{\alpha} y_{\alpha} & -\sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} x_{\alpha} z_{\alpha} \\ -\sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} x_{\alpha} y_{\alpha} & \sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} (x_{\alpha}^2 + z_{\alpha}^2) & -\sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} y_{\alpha} z_{\alpha} \\ -\sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} x_{\alpha} z_{\alpha} & -\sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} y_{\alpha} z_{\alpha} & \sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} (x_{\alpha}^2 + y_{\alpha}^2) \end{pmatrix}$$

Pohyb tuhého tělesa

⊕ Tenzor setrvačnosti

- symetrický tenzor 2.řádu: $J_{ki} = J_{ik}$
- diagonální složky - **axiální (osové) momenty setrvačnosti**
- nediagonální složky – **deviační momenty setrvačnosti**
- zobrazuje **prostorové rozložení hmotnosti v tuhém tělese**

$$\vec{L} = \vec{J} \vec{\omega}$$

osa rotace obecně
nemá stejný směr
jako moment
hybnosti L

axiální momenty
setrvačnosti

$$J_{11} = \int_m (y^2 + z^2) dm, \text{ atd.}$$

deviační momenty
setrvačnosti

$$\vec{J} = \begin{vmatrix} \sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} (y_{\alpha}^2 + z_{\alpha}^2) & -\sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} x_{\alpha} y_{\alpha} & -\sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} x_{\alpha} z_{\alpha} \\ -\sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} x_{\alpha} y_{\alpha} & \sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} (x_{\alpha}^2 + z_{\alpha}^2) & -\sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} y_{\alpha} z_{\alpha} \\ -\sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} x_{\alpha} z_{\alpha} & -\sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} y_{\alpha} z_{\alpha} & \sum_{\alpha=1}^n m_{\alpha} (x_{\alpha}^2 + y_{\alpha}^2) \end{vmatrix}$$

Tenzory

- ⊕ **Tenzor n -tého řádu** obsahuje 3^n prvků, které se při transformaci souřadných soustav transformují přesně definovaným způsobem

$$T_{spqr\dots}^* = \sum_{i,j,k,l,\dots} c_{si} c_{pj} c_{qk} c_{rl} T_{ijkl\dots}$$

**pro otočení
souř.soustavy**

$$c_{ki} = \cos(\vec{e}_k^*, \vec{e}_i)$$

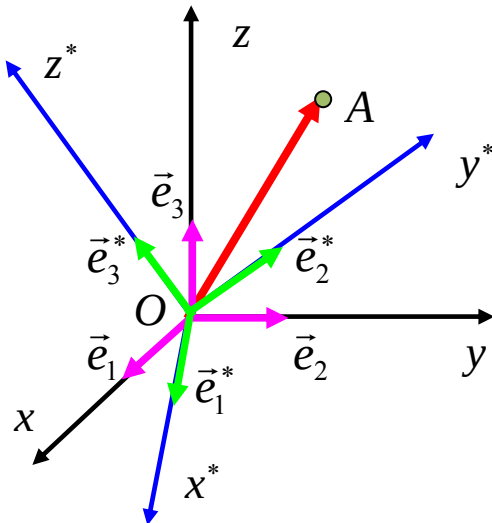
- **tenzor 0.řádu** – skalár (číslo)

- **tenzor 1.řádu** – vektor $A_k^* = \sum_{i=1}^3 c_{ki} A_i$

- **tenzor 2.řádu:** $T_{kl}^* = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 c_{ki} c_{lj} T_{ij}$ 

**9 složek tenzoru
2.řádu lze vyjádřit
pomocí matice**

$$\vec{T} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}$$



Tenzory

⊕ Hlavní osy a hlavní hodnoty tenzoru:

- taková souřadná soustava, kde **nediagonální složky tenzoru setrvačnosti jsou rovny nule**

$$T_{ij} = 0 \quad i \neq j$$

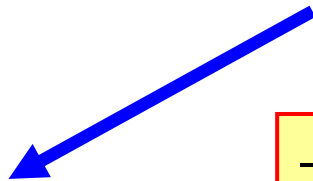
- diagonální složky T_1, T_2, T_3 se poté nazývají **hlavní hodnoty tenzoru**
- osy souřadného systému se nazývají **hlavní osy**

- Platí:

$$\vec{T} \vec{n} = T \vec{n}$$



$$\begin{vmatrix} T_{11} - T & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} - T & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} - T \end{vmatrix} = 0$$



$$T^* = \begin{vmatrix} T_1 & 0 & 0 \\ 0 & T_2 & 0 \\ 0 & 0 & T_3 \end{vmatrix}$$

-u tenzoru setrvačnosti bude např. moment hybnosti mít stejný směr jako vektor úhlové rychlosti

$$\vec{L} = \vec{J} \vec{\omega}$$

- hodnoty T_1, T_2, T_3 jsou extrémní ze všech možných natočení souřadné soustavy

Pohyb tuhého tělesa

- ⊕ námi zvolená soustava není inerciální, otáčí se spolu s tělesem
- ⊕ pro popis pohybu v je nutno převést moment hybnosti do neinerciální soustavy spojené s tělesem, tj.

druhá impulsová věta

$$\left(\frac{d\vec{L}}{dt} \right)_I = \left(\frac{d\vec{L}}{dt} \right)_N + [\vec{\omega} \times \vec{L}] = \vec{M}$$

$$\vec{L} = \tilde{J} \vec{\omega}$$

Eulerovy rovnice pro rotaci tuhého tělesa

$$\left(\frac{dL_1}{dt} \right)_N + \omega_2 L_3 - \omega_3 L_2 = M_1$$

$$\left(\frac{dL_2}{dt} \right)_N + \omega_3 L_1 - \omega_1 L_3 = M_2$$

$$\left(\frac{dL_3}{dt} \right)_N + \omega_1 L_2 - \omega_2 L_1 = M_3$$

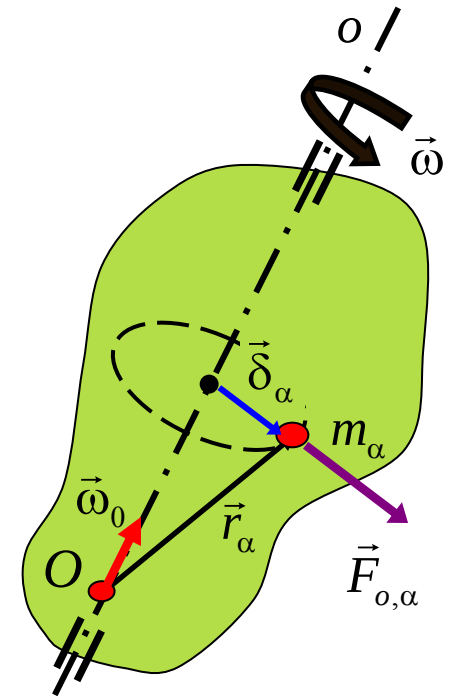
Pohyb tuhého tělesa

- ⊕ předpokládejme, že se těleso otáčí kolem pevné osy o
- ⊕ na každý bod tělesa poté působí **odstředivá síla**:

$$\vec{F}_{o,\alpha} = m_\alpha \omega^2 \vec{\delta}_\alpha = m_\alpha \omega^2 (\vec{\omega}_0 \times \vec{r}_\alpha) \times \vec{\omega}_0$$

výsledná odstředivá síla

$$\begin{aligned}\vec{F}_o &= \omega^2 \sum_\alpha m_\alpha (\vec{\omega}_0 \times \vec{r}_\alpha) \times \vec{\omega}_0 = \omega^2 \left(\vec{\omega}_0 \times \sum_\alpha m_\alpha \vec{r}_\alpha \right) \times \vec{\omega}_0 \\ &= m_T \omega^2 (\vec{\omega}_0 \times \vec{r}_T) \times \vec{\omega}_0 = m_T \omega^2 \vec{\delta}_T\end{aligned}$$



Při rotaci kolem pevné osy vznikají dynamické síly, které namáhají upevnění osy (ložiska)

výsledná odstředivá síla je rovna nule pouze, když osa rotace prochází těžištěm

Takové osy, kdy upevnění osy není namáháno dynamickými silami se nazývají **volné osy**

Pohyb tuhého tělesa

- ⊕ odstředivé síly mohou působit také momentem sil, i když osa rotace prochází těžištěm

$$\vec{F}_{o,\alpha} = m_\alpha \omega^2 \vec{\delta}_\alpha$$

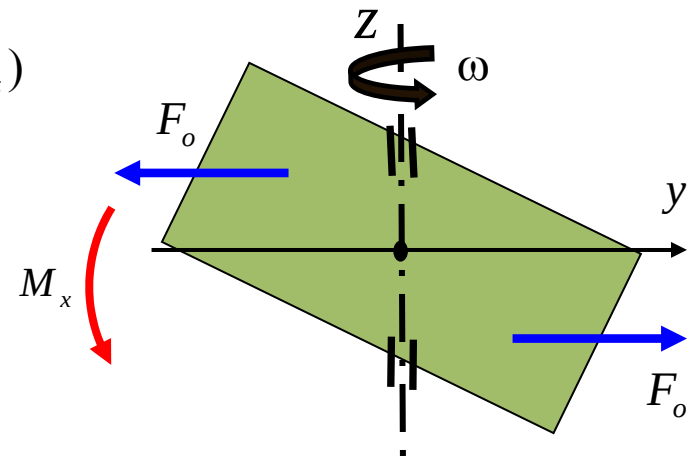
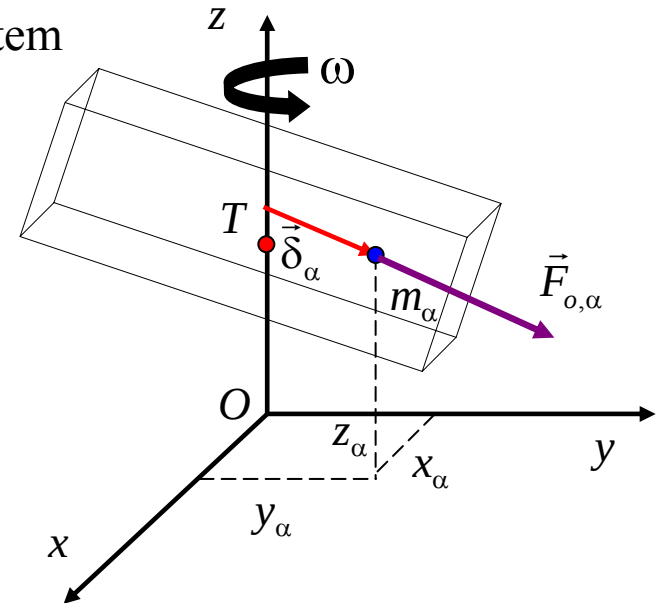
výsledný moment odstředivých sil:

$$\vec{M} = \sum_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \times \vec{F}_{o,\alpha} = \omega^2 \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\vec{r}_{\alpha} \times \vec{\delta}_{\alpha})$$

$$\begin{aligned} \vec{M} &= \omega^2 \sum_{\alpha} m_{\alpha} (x_{\alpha} \vec{i} + y_{\alpha} \vec{j} + z_{\alpha} \vec{k}) \times (x_{\alpha} \vec{i} + y_{\alpha} \vec{j}) = \\ &= \omega^2 \sum_{\alpha} m_{\alpha} [-y_{\alpha} z_{\alpha} \vec{i} - x_{\alpha} z_{\alpha} \vec{j}] = (\omega^2 J_{yz}, \omega^2 J_{xz}) \end{aligned}$$

Moment sil $\vec{M}$ se snaží vychýlit (deviovat) osu rotace z její polohy a tudíž vzniká namáhání upevnění

volnými osami rotujícího tělesa jsou hlavní těžišťové osy



Pohyb tuhého tělesa

Setrvačníky (gyroskopy):

- ✚ Setrvačníkem se rozumí každé těleso otáčející se okolo pevného bodu v prostoru

A) volný symetrický setrvačnick

$$J_1 = J_2 \neq J_3$$

-výsledná vnější síla a výsledný moment vnějších sil vůči bodu otáčení je nulový

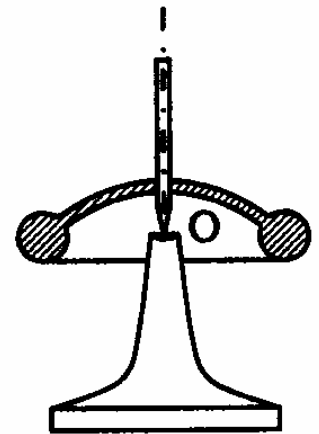
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} = \vec{0} \quad \longrightarrow \quad \vec{L} = \text{konst.}$$

$$\vec{L} = \vec{J} \vec{\omega} \quad \longrightarrow \quad \vec{\omega} = \text{konst.}$$

Vektor momentu hybnosti a úhlové rychlosti je v čase konstantní

Roztočíme-li setrvačnick kolem jeho osy symetrie, potom zachovává tato osa stálý směr v prostoru

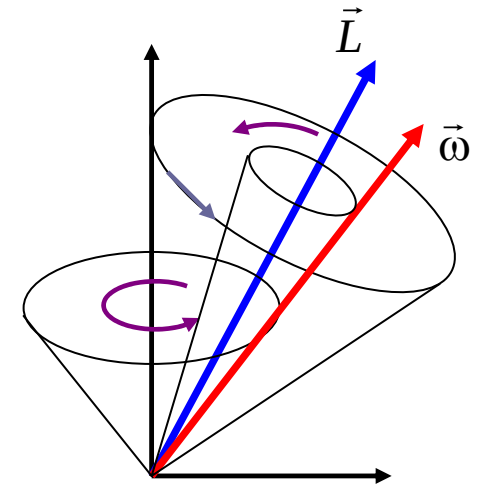
nemusí mít ovšem stejný směr – setrvačnick poté vykonává tzv. **precesní pohyb**



Pohyb tuhého tělesa

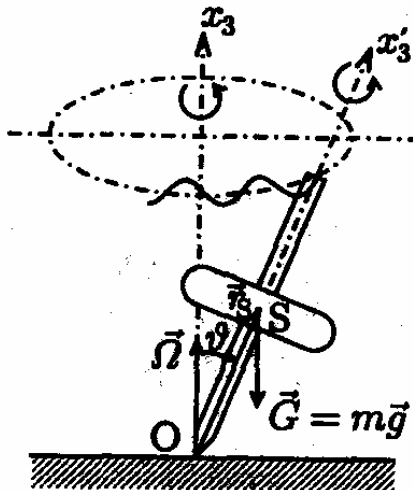
Setrvačnick koná dva rotační pohyby:

- vlastní rotace kolem své osy**
- precesní pohyb osy setrvačnicku kolem směru vektoru momentu hybnosti (úhlovou rychlostí Ω)**



B) těžký symetrický setrvačnick

-působí na něj moment tíhové síly vůči bodu otáčení, který není těžištěm



Precesní pohyb již není rovnoměrný

-okamžitá osa koná ve vodorovné rovině kmitavý pohyb (tzv.**nutace**)

Pokud je ovšem rychlost precese Ω malá vůči rychlosti vlastní rotace ω , potom nastává tzv.**pseudoregulární precese**

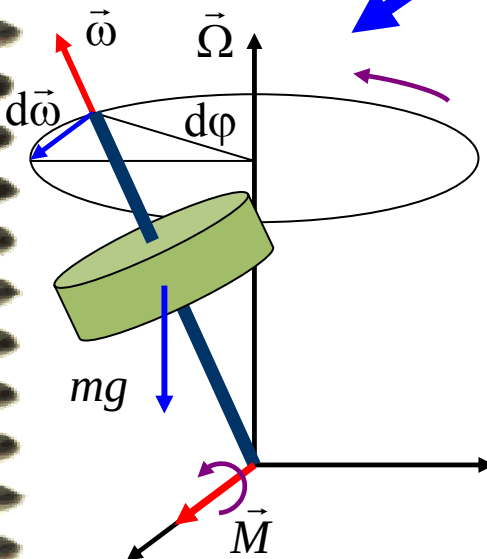
Pohyb tuhého tělesa

gyroskopický jev:

- při působení silového momentu (kolmého k ose rotace) na setrvačnick roztočený kolem osy symetrie vzniká zajímavá kinetická reakce setrvačnicku, tzv. **gyroskopický jev**

- pokud je moment síly $\vec{M}$ malý a vlastní rotace $\vec{\omega}$ vysoká, potom můžeme předpokládat, že se mění pouze směr a ne velikost vektorů $\vec{L}$ a $\vec{\omega}$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \approx J \frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

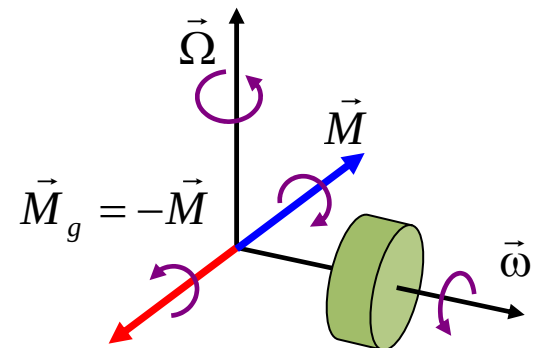


Setrvačnick koná pod vlivem vnějšího momentu precesní pohyb rychlostí Ω

$$\vec{M} = \frac{d\vec{\phi}}{dt} \times J\vec{\omega} = \vec{\Omega} \times J\vec{\omega}$$

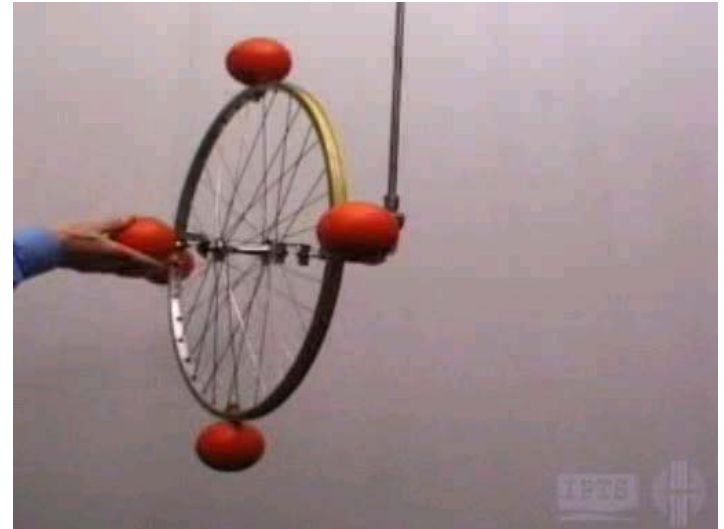
Při působení vnějšího momentu $\vec{M}$ se snaží osa rotace splynout se směrem vnucené precese

Při stáčení osy rotace je setrvačnick nucen konat precesní pohyb, reakcí setrvačnicku je tzv. **gyroskopický moment $\vec{M}_g$**



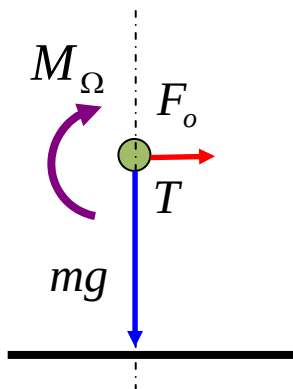
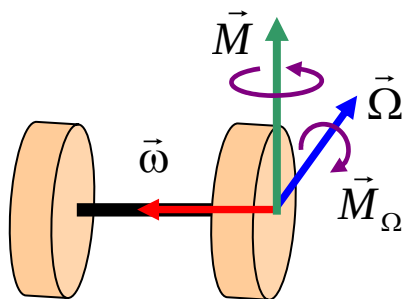
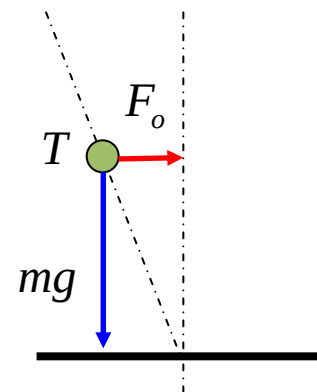
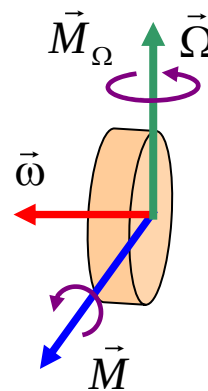
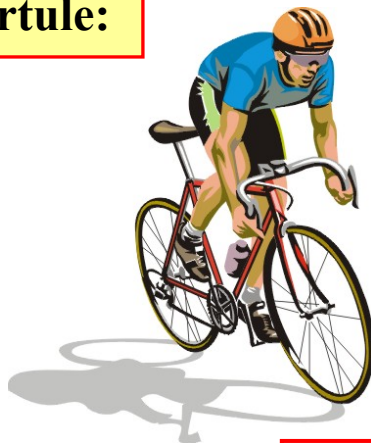
Pohyb tuhého tělesa

Video – setrvačníky:

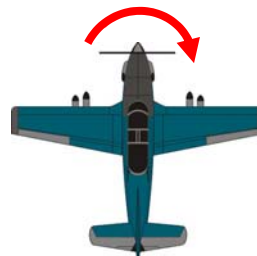
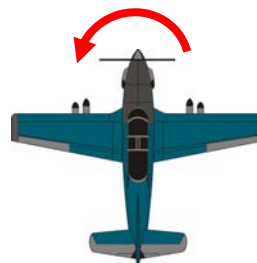


Pohyb tuhého tělesa

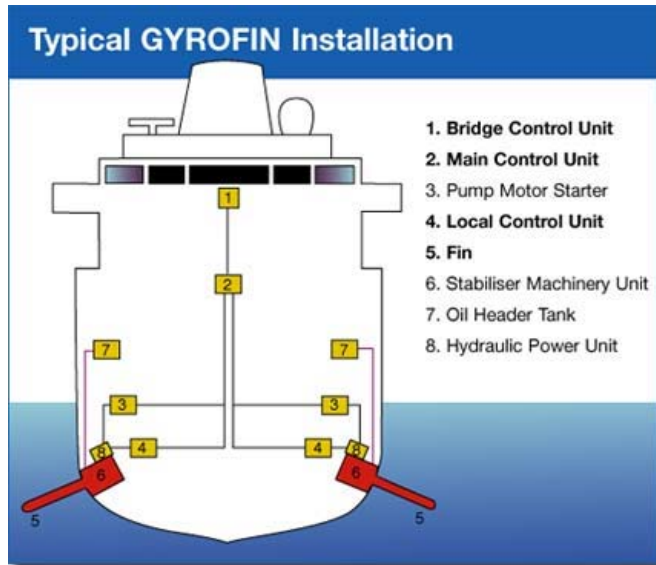
Kinetická reakce kol, vrtule:



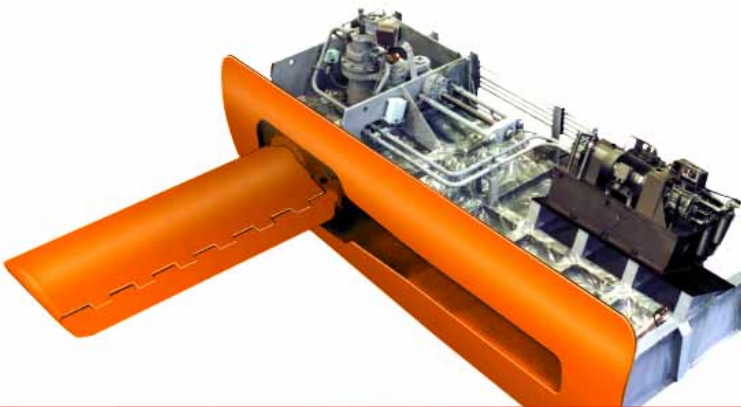
Jednostopá vozidla jsou dynamicky výhodnější nežli dvoustopá vozidla



Pohyb tuhého tělesa



stabilizace
střel, torpéd



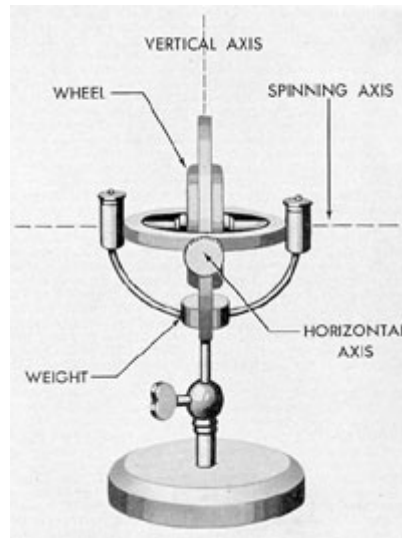
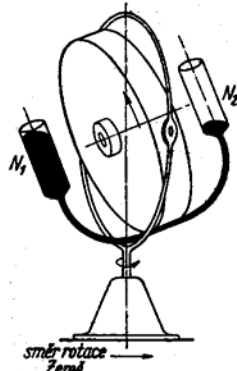
stabilizace lodí setrvačnickem



stabilizace dopr. prostředků

Pohyb tuhého tělesa

navigace lodí
gyrokompasem

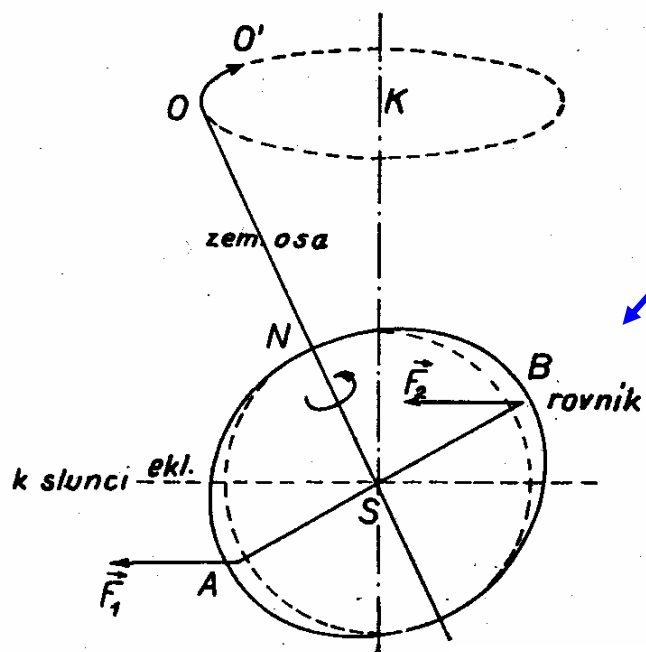


Osa setrvačníku
zachovává stálý směr



Pohyb tuhého tělesa

Planetu Země lze též
považovat za těžký setrvačník



Zemská osa koná precesní pohyb

úhlová změna – $50,40''$ za 1 rok

perioda pohybu – $T = 25700$ let
(Platónský rok)

