Mechanická silová pole

- **silové pole v mechanice** je vektorové pole charakterizované tzv. **intenzitou silového pole** (intenzitou síly):

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\vec{F}}{m} \quad [\mathrm{ms}^{-2}]}$$

- intenzita **je totožná se zrychlením**, které silové pole v daném místě udělí **libovolnému** tělesu

Silové pole ⟹ **pohyb těles**

$\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}, t)$ $\qquad$ $\vec{r} = \vec{r}(t)$

Silové pole působí tedy **na volné hmotné objekty** tak, že **je uvede do pohybu.**

Práce v silovém poli

- Síla, která přemístí určité těleso z jedné polohy (A) do polohy jiné (B), koná **práci**:

$$\boxed{A = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \left(\vec{F}(\vec{r},t)\cdot \mathrm{d}\vec{r}\right) \quad [\mathrm{J}]}$$

- **Práce *A*** je **skalární veličina**, která **závisí** obecně nejen **na počátečním a koncovém bodu dráhy**, ale i **na tvaru trajektorie *L***.

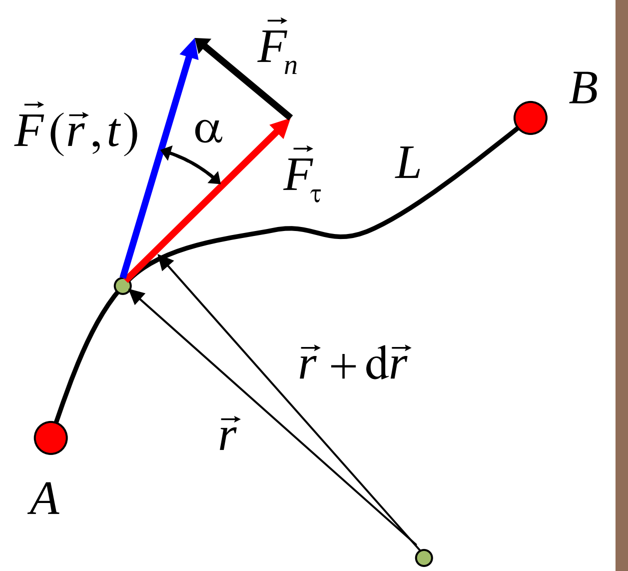
- **elementární práce:** $\mathrm{d}A = \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}$

$$\mathrm{d}A = |\vec{F}|\cdot|\mathrm{d}\vec{r}|\cos\alpha = F_\tau \mathrm{d}r$$

$$\Updownarrow$$

$$\mathrm{d}A = F\mathrm{d}s\cos\alpha$$

práci koná pouze tečná složka k trajektorii, tj. ve směru pohybu



- **Práce při otáčivém pohybu:**

$$\mathrm{d}A = \vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r} = \vec{F}\cdot(\mathrm{d}\vec{\varphi}\times\vec{r}) = \mathrm{d}\vec{\varphi}\cdot(\vec{r}\times\vec{F}) = \vec{M}\mathrm{d}\vec{\varphi}$$

Výkon síly

- Časová změna práce, která je konaná danou silou ***F***, se nazývá

okamžitý výkon *P*

$$P = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} \quad [\mathrm{W}]$$

- pro výkon můžeme psát:

$$\mathrm{d}A = \vec{F}\,\mathrm{d}\vec{r} \quad \Rightarrow \quad P = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \vec{F}\,\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}\cdot\vec{v}$$

Práce se tedy koná pouze, když síla rychlost pohybu na sebe nejsou kolmé

- **Mechanická účinnost stroje:**

$$\eta = \frac{A}{E_{dod}} = \frac{P}{P_0}$$

Výkon síly – měří se vykonanou prací za čas

Příkon – měří se dodanou energií za čas

Mechanická energie

Energie

- **skalární veličina**, která charakterizuje stav tělesa nebo hm.bodu
- je **mírou schopnosti těles konat práci**
- **změna energie *W* je rovna práci vnějších sil *A***

$$\boxed{\Delta W = W_2 - W_1 = A_{12}}$$

- **práce konaná silou *F* při pohybu**:

$$A_{12} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \left(\vec{F}(\vec{r}) \cdot \mathrm{d}\vec{r} \right) = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} m \left(\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \right) \cdot \mathrm{d}\vec{r} = \int_{t_1}^{t_2} m \left(\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} \right) \mathrm{d}t = \int_{t_1}^{t_2} m \left(\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} \cdot \vec{v} \right) \mathrm{d}t =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \frac{1}{2} m \frac{\mathrm{d}\left(v^2\right)}{\mathrm{d}t} \mathrm{d}t = \int_{v_1}^{v_2} m \mathrm{d}\left(\frac{1}{2} v^2 \right) = \left(\frac{1}{2} m v_2{}^2 - \frac{1}{2} m v_1{}^2 \right) = \Delta W_k$$

změna tzv. kinetické (pohybové) energie

- **Kinetická energie W_K** hmot.bodu:

$$\boxed{W_K = \frac{1}{2} m v^2}$$

Konzervativní silové pole

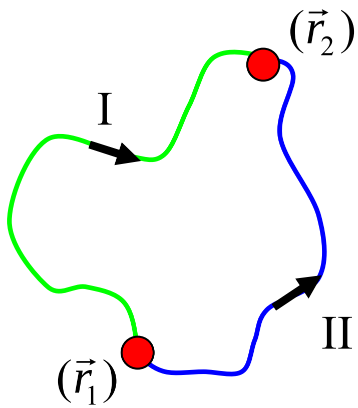
Konzervativní silová pole (pole konzervativní síly)

- **práce závisí pouze na počáteční a koncové poloze tělesa** a nikoliv na tvaru trajektorie. $A_{12} = f\left(\left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right|\right)$
- přemístíme-li těleso po uzavřené křivce *L*, pak **vykonaná práce je nulová**, tj. platí

např. gravitační síla, resp. elastická síla je konzervativní

$$\boxed{A = \oint_L \left(\vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r}\right) = 0}$$

$$\left(A_{12}\right)_{\mathrm{I}} = \left(A_{12}\right)_{\mathrm{II}}$$



- mají <u>dvě základní vlastnosti</u>:

a) jsou **potenciálová**, tj. jejich intenzita může být vyjádřena pomocí gradientu skalární funkce (zvané **potenciál** silového pole)

$$\boxed{\vec{E} = -\mathrm{grad}\,\varphi}$$

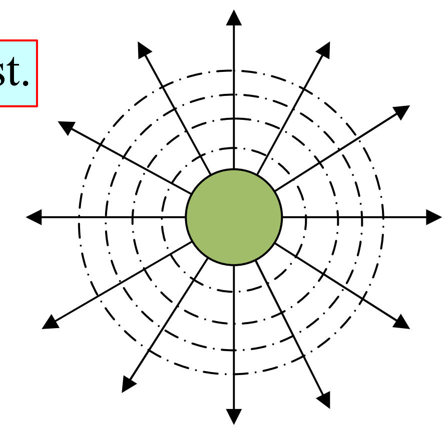
b) jsou **stacionární**, tj. síla ani potenciál silového pole nezávisí na čase, ale pouze na poloze

$$\boxed{\vec{F} = \vec{F}(\vec{r}) \qquad \varphi = \varphi(\vec{r})}$$

Konzervativní silové pole

- **<u>Ekvipotenciální plocha:</u>**

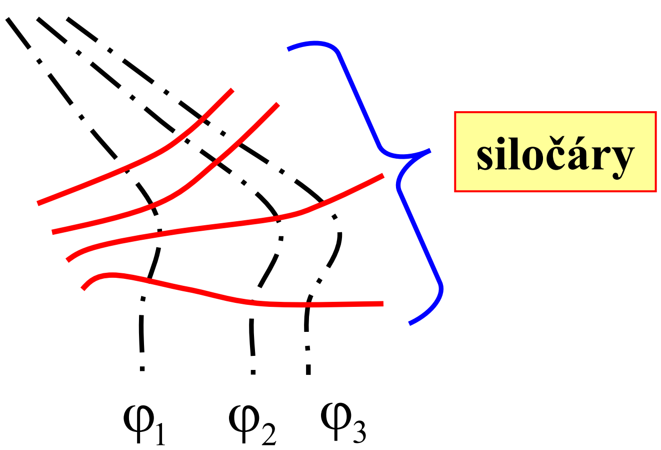
- **plocha konstantního potenciálu** $\boxed{\varphi(x, y, z) = \text{konst.}}$



- **<u>Siločáry:</u>**

- mají **směr normály k ekvipotenciální ploše**
- tyto křivky se vzájemně neprotínají
- můžeme pomocí nich graficky znázornit velikost intenzity pole

$$\vec{n} = \frac{\operatorname{grad}\varphi}{\left|\operatorname{grad}\varphi\right|}$$



Konzervativní silové pole

- Jestliže do určitého bodu v silovém poli, jehož potenciál v tomto bodě je φ, vložíme hmotný bod o hmotnosti m reprezentující těleso, získá toto těleso **potenciální** (polohovou) **energii** W_p:

potenciální energie

$$W_p = m\varphi$$

závisí pouze na poloze v silovém poli

- **Potenciální energii mají** pouze **tělesa v poli konzervativních sil**.

- pro **elementární přírůstek práce dA** platí:

Práce konaná proti působení vnějších sil pole

$$\mathrm{d}A = \left(\vec{F}\cdot \mathrm{d}\vec{r}\right) = m\left(\vec{E}\cdot \mathrm{d}\vec{r}\right) = -m\left(\mathrm{grad}\,\varphi \cdot \mathrm{d}\vec{r}\right) = -m\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\vec{r}}\cdot \mathrm{d}\vec{r}\right) = -m\cdot \mathrm{d}\varphi = -\mathrm{d}W_p$$

- **celková práce A_{12}** konaná při přemístění tělesa z polohy 1 do polohy 2:

$$A_{12} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \mathrm{d}A = -\int_{E_{p1}}^{E_{p2}} \mathrm{d}W_p = -\Delta W_p = \Delta W_k$$

Úbytek potenciální energie lze vyjádřit jako práci A_{12} potřebnou na přemístění tělesa z pozice 1 do pozice 2

Konzervativní silové pole

- Zvolíme bod 2 v místě, kde potenciál nabývá nulové hodnoty $\varphi_2 = 0$

$$A_{12} = -\Delta W_p = W_{p1} - W_{p2} = m\varphi_1 - m\varphi_2 = m\varphi_1 \Rightarrow \boxed{W_p = m\varphi}$$

- **volba nulové hladiny potenciální energie** je otázkou dohody (obvykle ji klademe do nekonečna, v určitých případech je vhodné ji ztotožnit s povrchem Země).

- pro **konzervativní silové pole** tedy platí:

$$A_{12} = -\Delta W_p \quad \wedge \quad A_{12} = \Delta W_k$$

$$\Downarrow$$

$$W_{p1} - W_{p2} = W_{k2} - W_{k1}$$

$$\Downarrow$$

$$W_{k1} + W_{p1} = W_{k2} + W_{p2} \Rightarrow \boxed{W_k + W_p = \frac{1}{2}mv^2 + m\varphi = \text{konst.}}$$

Pro konzervativní silové pole platí **zákon zachování mechanické energie**

Nekonzervativní silové pole

Nekonzervativní silová pole:

- na těleso působí i tzv. **nekonzervativní síly** (tření, odporové síly), které již nejsou funkcí pouze polohy, ale závisí na rychlosti, se kterou se těleso pohybuje $\vec{F}^* = \vec{F}^*(\vec{r},\vec{v},t) \Rightarrow \oint_L \left(\vec{F}^* \cdot \mathrm{d}\vec{r}\right) < 0$
- vliv těchto sil vede k tzv. **disipaci energie**, tj. k přeměně mechanické energie W na teplo Q.

Celková práce vnějších sil:

$$A = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}\mathrm{d}\vec{r} + \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}^*\mathrm{d}\vec{r} = A_{12} + A_{12}^*$$

$$\Delta W_k = -\Delta W_p + A_{12}^*$$

$$W_2 - W_1 = A_{12}^*$$

práce nekonzervativních sil je rovna změně mechanické energie

v poli nekonzervativních sil **neplatí zákon zachování mechanické energie**

$$A_{12}^* = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}^*\mathrm{d}\vec{r} < 0$$

$\mathrm{d}\vec{r}$

$\vec{F}^*$

Nekonzervativní silové pole

Síly tření:

- **tření** - jev vyvolaný interakcí mezi dotýkajícími se tělesy
- projevuje se vznikem **třecích sil**, působících **proti vzájemnému pohybu** dotýkajících se těles (částí látky)
- **závisí na vlastnostech těles**

a) vnitřní tření

- vzniká při vzájemném posouvání částí téže látky (např. kapaliny)
- **vznik tečných sil** proti směru posuvu (souvisí s **viskozitou látek**)

b) vnější tření

- vzniká **mezi pevnými tělesy**, které se navzájem dotýkají a která jsou k sobě přitlačována určitou silou
- **působí proti směru vzájemného pohybu těles** (např. smykové a valivé tření,…)

Nekonzervativní silové pole

<u>Odporové síly</u>:

- obecně **závisí na rychlosti**
- působí **proti pohybu**
- odporové koeficienty A,B,C,… **závisí na tvaru tělesa a vlastnostech prostředí** (např. síly vazkosti v kapalinách a plynech)

$$\vec{F}_o = \vec{F}_o(\vec{v}) = -\frac{\vec{v}}{v}(A + Bv + Cv^2 + \ldots)$$

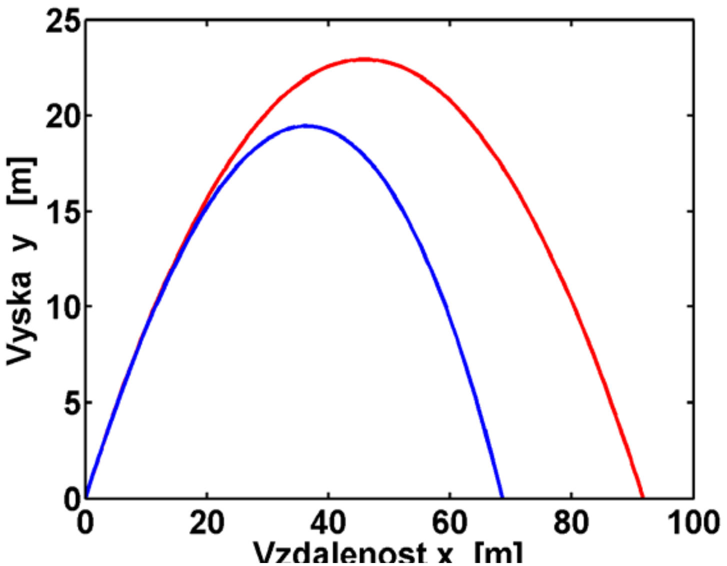
a) pomalý pohyb v kapalinách:

$$\vec{F}_o \doteq -B\vec{v}$$

b) pohyb ve vzduchu (aerodynamika):

$$\vec{F}_o \doteq -Cv\vec{v} = -\frac{1}{2}C_x\rho Sv\vec{v}$$

Šikmý vrh ve vzduchu



Nekonzervativní silové pole

Smykové tření:

- dá-li se plocha styku obou těles považovat za rovinnou a jde o tzv.suché tření, potom velikost třecí síly je **přímo úměrná normálové složce přítlačné síly**
- konstanta úměrnosti se nazývá **součinitel smykového tření** μ

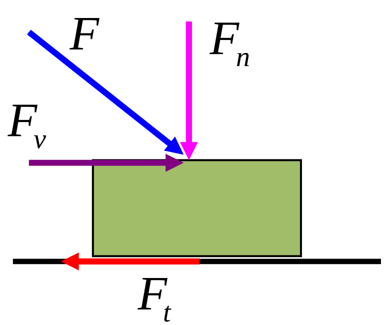
$$\boxed{F_t = \mu F_n}$$

Součinitel smykového tření

- rozlišujeme **statický** μ_s a **dynamický** μ součinitel smykového tření
- lze ho vyjádřit pomocí tzv.**třecího úhlu** φ

$$\boxed{\mu_s \geq \mu}$$

$$\boxed{\mu = \frac{F_t}{F_n} = \mathrm{tg}\,\varphi}$$



rovnoměrný pohyb po nakloněné rovině o sklonu φ

Nekonzervativní silové pole

Valivé tření:

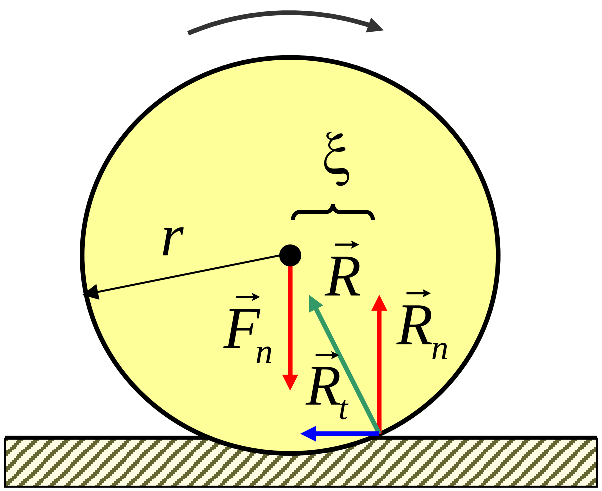
- vyjadřuje **odpor při valení** oblého pevného tělesa po jiném tělese, k němuž je přitlačováno určitou silou (např.kolo na vozovce)
- valivý odpor **je vyvolán deformacemi obou těles v oblasti jejich styku**
- vzniká **moment dvojice sil**

$$\boxed{M = \xi F_n = \xi R_n}$$

ξ - **rameno valivého odporu** [m]

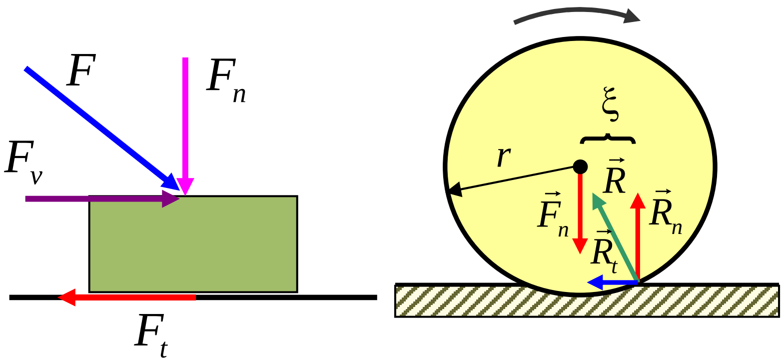
- jedná-li se o valení homogenního válce nebo koule s poloměrem *r*, potom:

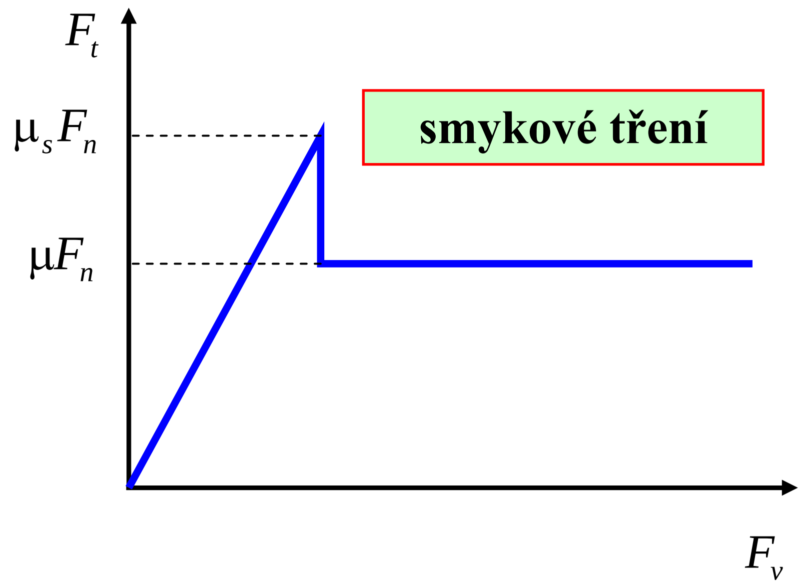
$$\xi << r \quad \Rightarrow \quad \boxed{F_t = R_t = \frac{\xi}{r} F_n}$$



- konstanta úměrnosti ξ se též nazývá **součinitel valivého tření** μ_V

Smykové a valivé tření





SMYKOVÉ TŘENÍ	μ_s	μ
Sklo-sklo	0,94	0,4
Ocel-ocel	0,3	0,25
Kov-dřevo	0,6	0,2-0,6
Pneu-beton	0,9	0,7
Dřevo-dřevo	0,45-0,6	0,2-0,48
Ocel-led	0,27	0,014

VALIVÉ TŘENÍ	ξ [cm]
Pneu-asfalt	0,025
Pneu-beton	0,015
Pneu-písek	0,5
Ocel-ocel	0,005
Dřevo-dřevo	0,05
Kuličková ložiska	0,0005

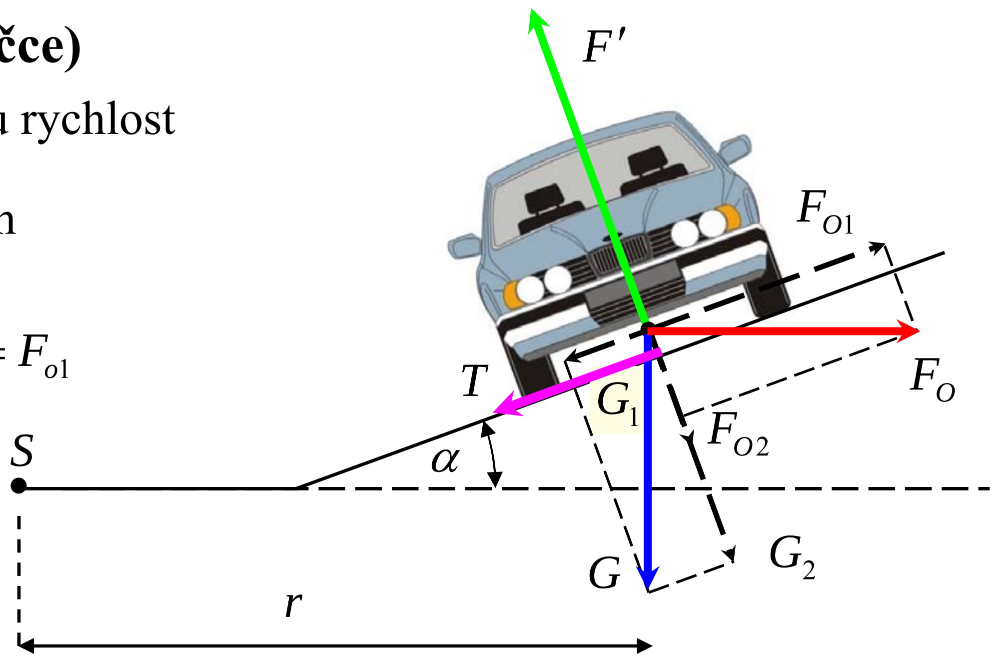
Třecí síly

<u>Příklad:</u> (automobil v zatáčce)

- určete maximální průjezdovou rychlost

Poloměr zatáčky: $r = 50\ \text{m}$

podmínka rovnováhy sil: $G_1 + T = F_{o1}$



$$G = mg$$

$$F_o = mv^2 / r$$

$$T = \mu(G_2 + F_{o2})$$

$$G\sin\alpha + \mu(G\cos\alpha + F_o\sin\alpha) = F_o\cos\alpha$$

$$v(\alpha) = \sqrt{\frac{rg(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{\cos\alpha - \mu\sin\alpha}}$$

$\alpha_1 = 5^\circ$ ⇨ $v_{1,\max} = 50{,}2\ \text{km/h}$

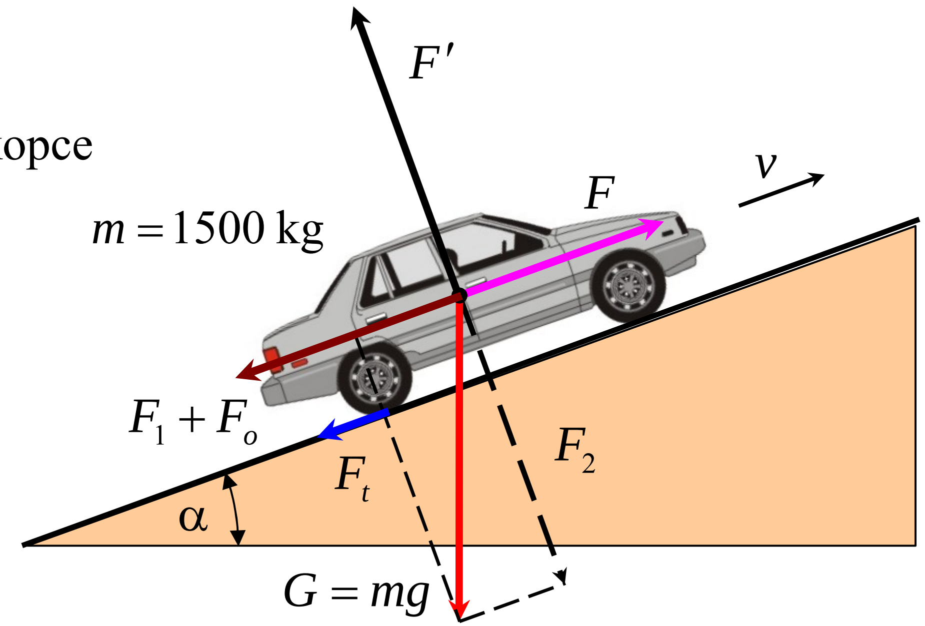
$\alpha_2 = 0^\circ$ ⇨ $v_{2,\max} = 43{,}7\ \text{km/h}$

$\alpha_3 = -5^\circ$ ⇨ $v_{3,\max} = 36{,}3\ \text{km/h}$

Třecí síly

Příklad: **(výkon automobilu)**

- automobil jede rovnoměrně do kopce



rychlost: $v = 60$ km/h

sklon: $\beta = 10\ \%$

$\alpha = \mathrm{arctg}(\beta / 100) = 5{,}7^\circ$

poloměr kola: $r = 500$ mm

valivé tření: $\xi = 30$ mm

odpor vzduchu: $k = 0{,}7\ \mathrm{Nm^{-2}s^{2}}$

$$F = F_1 + F_t + F_o = mg\sin\alpha + \xi r mg\cos\alpha + kv^2$$

výkon automobilu: $P = Fv \doteq 31{,}3$ kW

Třecí síly

<u>Příklad:</u> (parašutista)

- na parašutistu působí výsledná síla:

vztlak zanedbáme

$F_{vz} << G$

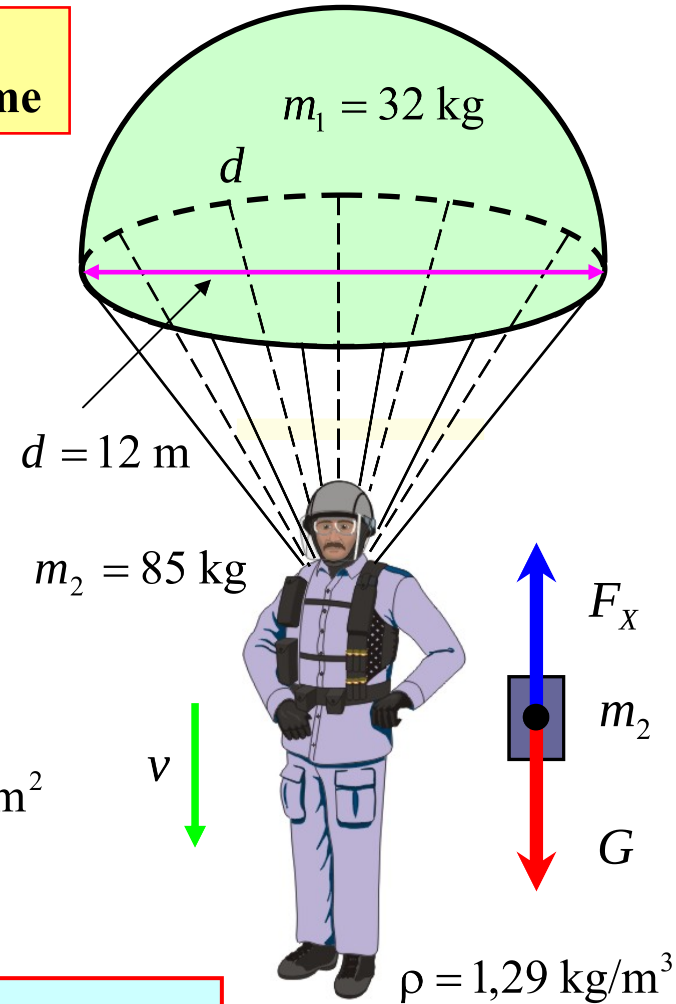
$$\boxed{F = G - F_x - F_{vz}}$$

tíhová síla $G = (m_1 + m_2)g$

odporová síla $F_x = \frac{1}{2}\rho C_x S v^2$

bez padáku $C'_x = 0{,}4$ $S' = 0{,}3\ \mathrm{m}^2$

s padákem $C_x = 1{,}3$ $S = \frac{\pi d^2}{4} = 113{,}1\ \mathrm{m}^2$



max. pádová rychlost

$$\boxed{F = 0} \rightarrow v = \sqrt{\frac{2(m_1 + m_2)g}{S C_x \rho}}$$

$v' = 122$ m/s

$v = 3{,}48$ m/s

Třecí síly

Video - padák