

Základy vektorového počtu

kartézská soustava souřadná (pravoúhlá, pravotočivá)

- vektor je popsán svými třemi průměty a_x , a_y , a_z do souřadných os a ortogonálními vektory báze

vektor:

$$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z) = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$

velikost vektoru:

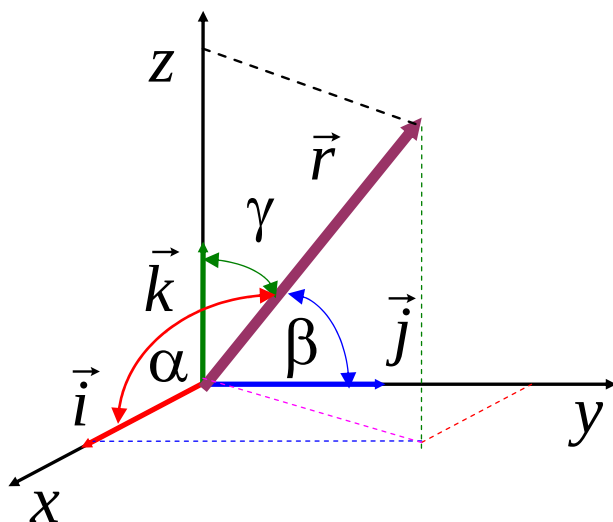
$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

vektory báze:

$$\vec{i} = (1, 0, 0)$$

$$\vec{j} = (0, 1, 0)$$

$$\vec{k} = (0, 0, 1)$$



Polohový vektor:

$$\vec{r} = (x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{r} \quad \cos \beta = \frac{y}{r} \quad \cos \gamma = \frac{z}{r}$$

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

Základy vektorového počtu

⊕ v praxi existují i jiné (křivočaré) souřadné soustavy
(sférické, válcové, eliptické,...)

$$\vec{r} = (x, y, z) = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

sférické souřadnice:

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi$$

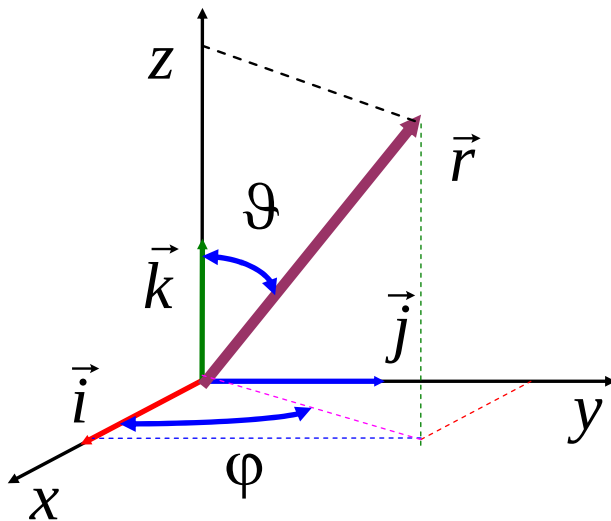
$$y = r \sin \vartheta \sin \varphi$$

$$z = r \cos \vartheta$$

$$\cos \vartheta = \frac{z}{r}$$

$$\sin \varphi = \frac{y}{r}$$

$$\cos \varphi = \frac{x}{r}$$



Základy vektorového počtu

Skalární součin dvou vektorů

- výsledkem je číslo (skalár)

$$S = (\vec{a} \cdot \vec{b}) = ab \cos \varphi_{\vec{a}\vec{b}} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = \sum_k a_k b_k$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

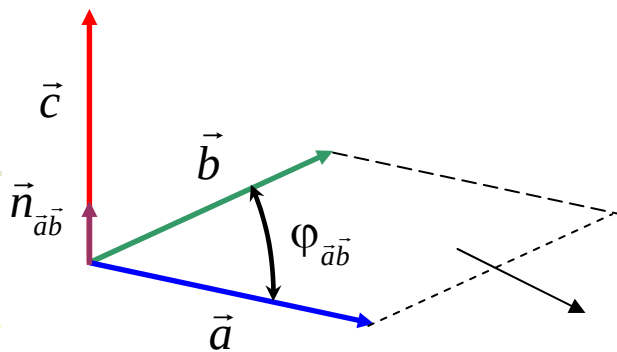
$$\vec{a} \perp \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = ab$$

Vektorový součin dvou vektorů

- výsledkem je vektor, kolmý na oba vektory

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = [\vec{a}, \vec{b}] = (ab \sin \varphi_{\vec{a}\vec{b}}) \vec{n}_{\vec{a}\vec{b}} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$



plocha: $S = |\vec{a} \times \vec{b}| = ab \sin \varphi_{\vec{a}\vec{b}}$

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

$$\vec{c} \perp \vec{a} \quad \wedge \quad \vec{c} \perp \vec{b}$$

$$\vec{a} \parallel \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$$

Základy vektorového počtu

Dvojnásobný vektorový součin:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

Smíšený součin vektorů :

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Dále platí identita

$$([\vec{a} \times \vec{b}] \cdot [\vec{c} \times \vec{d}]) = (\vec{a} \cdot \vec{c})(\vec{b} \cdot \vec{d}) - (\vec{b} \cdot \vec{c})(\vec{a} \cdot \vec{d})$$

-při cyklické permutaci
vektorů se nemění

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$$

✗

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = -\vec{a} \cdot (\vec{c} \times \vec{b})$$

Dyadický (tenzorový) součin vektorů :

- výsledkem je matice

$$\vec{c} = \vec{a} \otimes \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x b_x & a_x b_y & a_x b_z \\ a_y b_x & a_y b_y & a_y b_z \\ a_z b_x & a_z b_y & a_z b_z \end{pmatrix}$$

Základy vektorového počtu

Elementární otočení vektoru kolem osy:

velikost oblouku

$$ds = R d\varphi$$

-jednotkový vektor ve směru osy otáčení: $|\vec{c}| = 1$

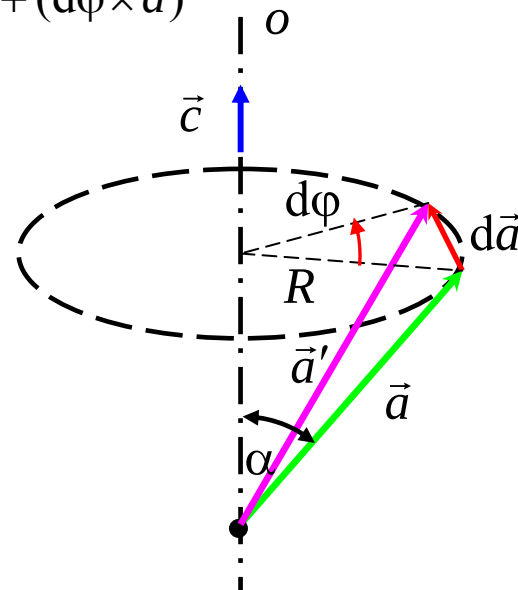
-otočení o elementární úhel $d\varphi$

$$(\vec{c} \times \vec{a}) = a \cdot \sin \alpha \frac{d\vec{a}}{|d\vec{a}|} = R \frac{d\vec{a}}{ds} = \frac{d\vec{a}}{d\varphi}$$

-pootočený vektor: $\vec{a}' = \vec{a} + d\vec{a} = \vec{a} + (\vec{c} \times \vec{a})d\varphi = \vec{a} + (d\vec{\varphi} \times \vec{a})$

-vektor pootočení: $d\vec{\varphi} = \vec{c} \cdot d\varphi$

-změna vektoru: $d\vec{a} = d\vec{\varphi} \times \vec{a}$



Základy vektorového počtu

Ortogonální transformace souřadnic (rotace):

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_x \mathbf{T}_y \mathbf{T}_z$$



$$\vec{a}' = \mathbf{T} \vec{a}$$

$$\mathbf{T}_x = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \psi & -\sin \psi \\ 0 & \sin \psi & \cos \psi \end{pmatrix}$$

rotace kolem osy x o úhel ψ

$$\mathbf{T}_y = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & 0 & \sin \vartheta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \vartheta & 0 & \cos \vartheta \end{pmatrix}$$

rotace kolem osy y o úhel ϑ

$$\mathbf{T}_z = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

rotace kolem osy z o úhel φ

Užitečné matematické vztahy

Taylorův rozvoj:

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} \Delta x + \frac{f''(x_0)}{2!} \Delta x^2 \dots$$

⊕ počítání s malými čísly:

$$\varepsilon \ll 1$$



$$(1 \pm \varepsilon)^n = 1 \pm n\varepsilon$$

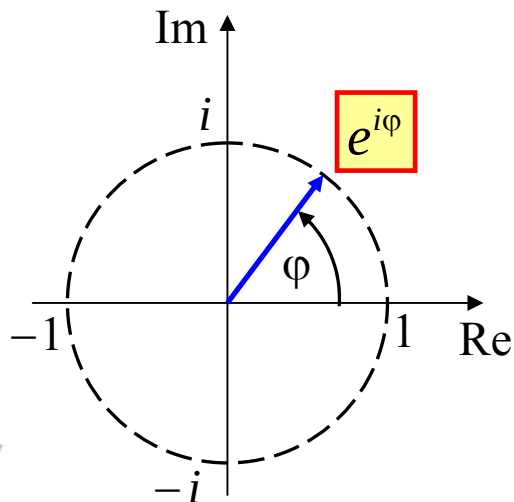
Eulerův vztah:

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

$$\sin \alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{3} + \frac{\alpha^5}{5} - \dots$$

$$\cos \alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4}{4} - \dots$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \dots$$



$$i = \sqrt{-1}$$

Základy vektorového počtu

- ⊕ změna nějaké veličiny $Y = f(X_i)$, která je funkcí N proměnných X_i lze vyjádřit pomocí **totálního diferenciálu**

totální diferenciál:

$$dY = \sum_{i=1}^N \frac{\partial f}{\partial X_i} dX_i$$

vyjadřuje lineární přírůstek funkce f

- ⊕ ve fyzice často veličiny závisí na jiných veličinách (např. na čase, atd.) a pro **změnu vektorové funkce skalárního argumentu** platí:

derivace

$$f'(x) \equiv \frac{df}{dx}$$

$$\frac{d\vec{a}(t)}{dt} = \left(\frac{da_x}{dt}, \frac{da_y}{dt}, \frac{da_z}{dt} \right) = \frac{da_x}{dt} \vec{i} + \frac{da_y}{dt} \vec{j} + \frac{da_z}{dt} \vec{k}$$



diferenciál vektoru:

$$d\vec{a}(t) = \vec{i} da_x + \vec{j} da_y + \vec{k} da_z$$

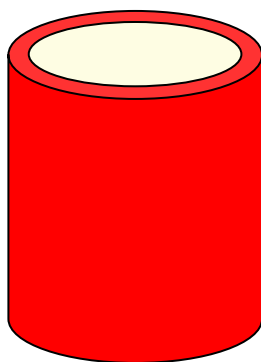
Základy vektorového počtu

Příklad: (výpočet změny objemu a povrchu válce)

⊕ pokud budou změny rozměrů ΔD a Δh dostatečně malé:

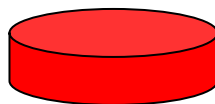
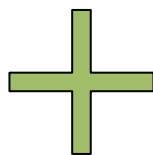
objem:

$$V = \pi r^2 h$$



povrch:

$$S = 2\pi r h + 2\pi r^2$$

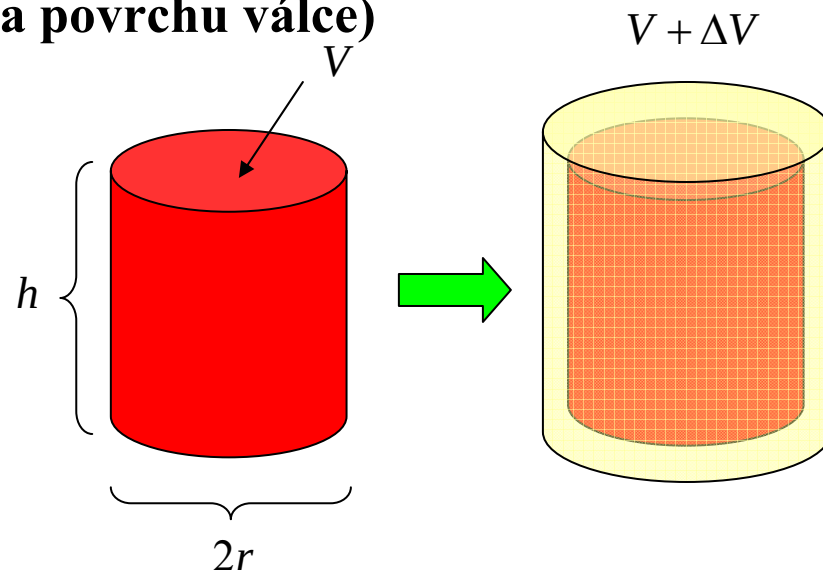


Změna objemu:

$$\Delta V \doteq \frac{\partial V}{\partial r} \Delta r + \frac{\partial V}{\partial h} \Delta h = 2\pi r h \Delta r + \pi r^2 \Delta h$$

Změna povrchu:

$$\Delta S \doteq \frac{\partial S}{\partial r} \Delta r + \frac{\partial S}{\partial h} \Delta h = (2\pi h + 4\pi r) \Delta r + 2\pi r \Delta h$$



Vlastnosti totálního diferenciálu

- ⊕ změnu veličiny $Y = f(X_i)$, která je funkcí N proměnných X_i , lze vyjádřit pomocí **totálního diferenciálu**

totální diferenciál:

$$dY = \sum_{i=1}^N \frac{\partial f}{\partial X_i} dX_i$$

vyjadřuje lineární přírůstek funkce f

pokud je diferenciální změna δY nějaké funkce $Y=g(X_i)$ jejím **totálním diferenciálem** potom platí:

změna funkce Y :

$$\Delta Y = \int_1^2 dY = Y_2(X_i) - Y_1(X_i)$$

závisí pouze na počáteční a koncové hodnotě funkce g

$$\oint_C dY = Y_2 - Y_1 = 0$$

křivkový integrál z dané funkce po uzavřené křivce C je roven nule

Základy vektorového počtu

derivace součinu:

$$\frac{d}{dt}[S(t)\vec{a}(t)] = \frac{dS}{dt}\vec{a} + S\frac{d\vec{a}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}[\vec{a}(t)\vec{b}(t)] = \frac{d\vec{a}}{dt}\vec{b} + \vec{a}\frac{d\vec{b}}{dt}$$

$$\frac{d}{dt}[\vec{a}(t) \times \vec{b}(t)] = \frac{d\vec{a}}{dt} \times \vec{b} + \vec{a} \times \frac{d\vec{b}}{dt}$$

diferenciál součinu:

$$d[\vec{a}(t)\vec{b}(t)] = d\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot d\vec{b}$$

$$d[\vec{a}(t) \times \vec{b}(t)] = d\vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times d\vec{b}$$

$$d[\vec{a}(t)^2] = 2\vec{a} \cdot d\vec{a}$$

umožňuje určit, jak se nám změní
výsledný součin (skalární, vektorový)
při malé (infinitesimální) změně
dílčích veličin

Základy vektorového počtu

- ⊕ zaved'me nyní zcela zvláštní “vektor”, tzv. **Hamiltonův operátor** (nabla)

$$\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

jedná se o symbolický
diferenciální operátor, který
umožňuje zjistit změnu dané
veličiny v závislosti na
prostorových souřadnicích x, y, z

- ⊕ symbolicky též můžeme místo ∇ psát také

$$\frac{d}{d\vec{r}} \equiv \nabla$$

- ⊕ dále si zaved'me další symbolický diferenciální operátor, tzv. **Laplaceův operátor** Δ

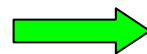
$$\Delta = \nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Základy vektorového počtu

- ⊕ **derivace složené vektorové funkce** vektorového argumentu: $\vec{a}(t, \vec{b}(t))$

$$\vec{c} = \frac{d\vec{a}}{dt} = \left(\frac{da_x}{dt}, \frac{da_y}{dt}, \frac{da_z}{dt} \right) = (c_x, c_y, c_z)$$

$$c_x = \frac{da_x}{dt} = \frac{\partial a_x}{\partial t} + \frac{\partial a_x}{\partial b_x} \frac{\partial b_x}{\partial t} + \frac{\partial a_x}{\partial b_y} \frac{\partial b_y}{\partial t} + \frac{\partial a_x}{\partial b_z} \frac{\partial b_z}{\partial t}$$



$$\vec{c} = \frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{\partial \vec{a}}{\partial t} + \left(\frac{d\vec{b}}{dt} \cdot \nabla \right) \cdot \vec{a}$$

- ⊕ pokud platí: $\vec{b}(t) = \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$

- ⊕ potom časová změna veličiny $\vec{a}(t, \vec{r})$

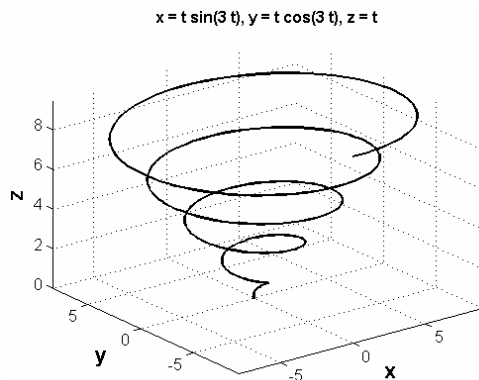
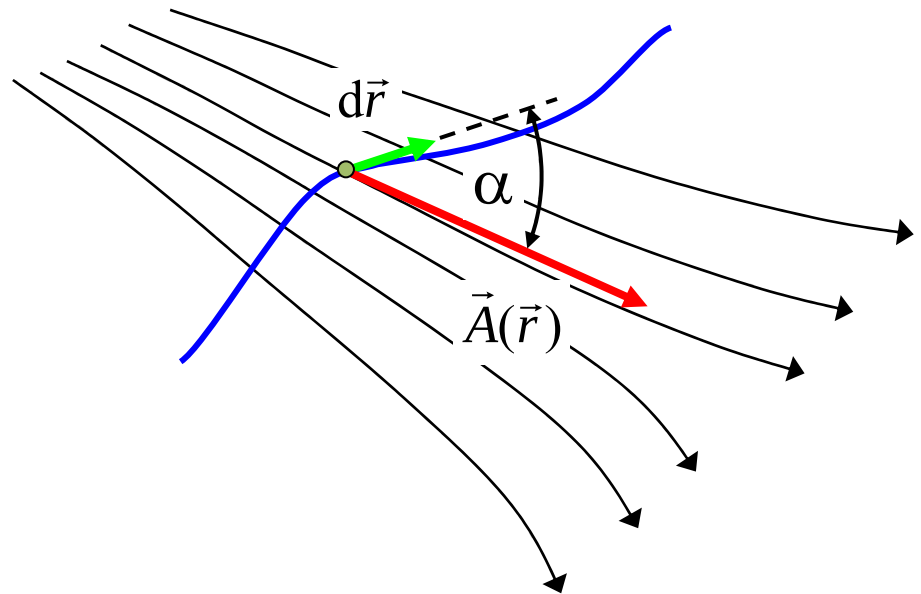
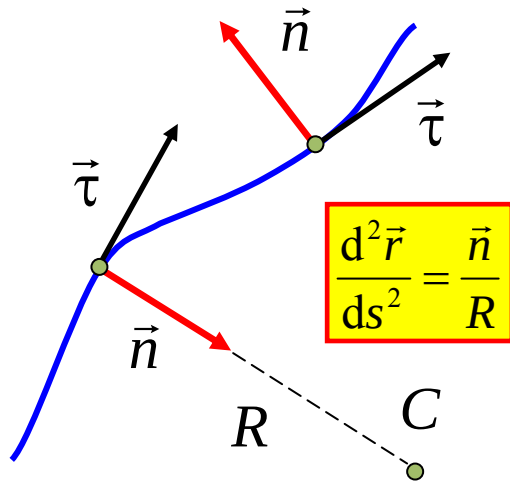
$$\vec{c} = \frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{\partial \vec{a}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \cdot \vec{a}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

jedná se o častý praktický případ, kdy nám **veličina závisí na poloze a čase**, např. rychlost, teplota,...

Základy vektorového počtu

Křivky



$$d\vec{r} = \vec{\tau} \cdot ds = (dx, dy, dz) = \vec{i} dx + \vec{j} dy + \vec{k} dz$$

$$C : \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

$$ds = |d\vec{r}| = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$$

$$\frac{1}{R} = \left| \frac{d^2\vec{r}}{ds^2} \right| = \sqrt{\left(\frac{dx}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dz}{ds} \right)^2}$$

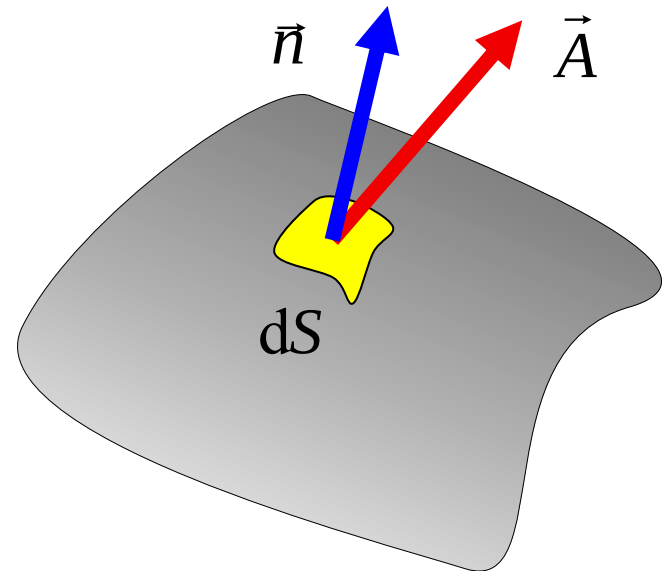
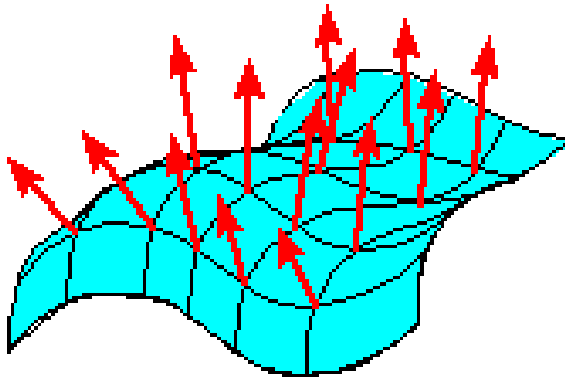
Základy vektorového počtu

Plocha

$$S : \Phi(x, y, z) = 0$$

$$\Phi : \begin{cases} x = x(u, v) \\ y = y(u, v) \\ z = z(u, v) \end{cases} \quad \vec{n} = \frac{\text{grad } \Phi}{|\text{grad } \Phi|} = \frac{\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y} + \frac{\partial \Phi}{\partial z}}{\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2}$$

$$d\vec{S} = \vec{n} dS \quad dS = |d\vec{S}|$$

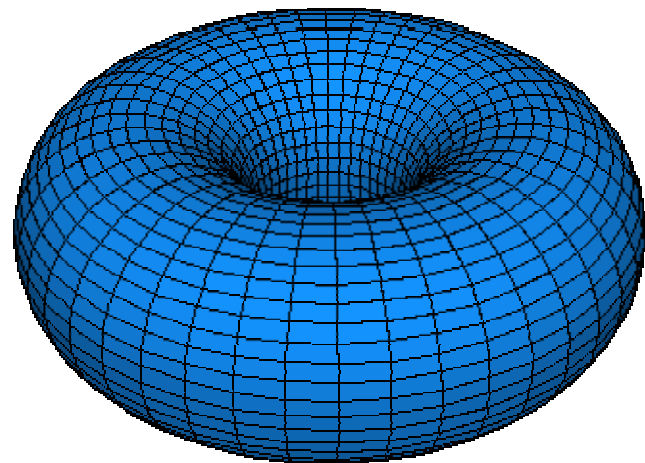
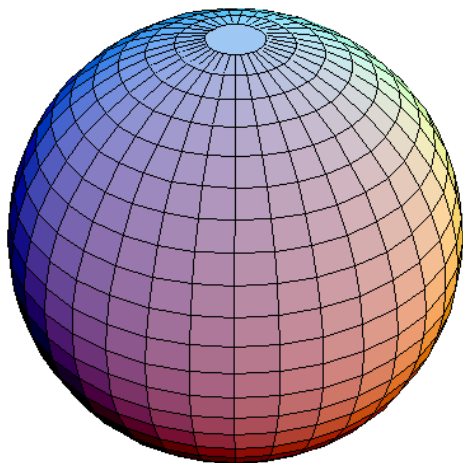
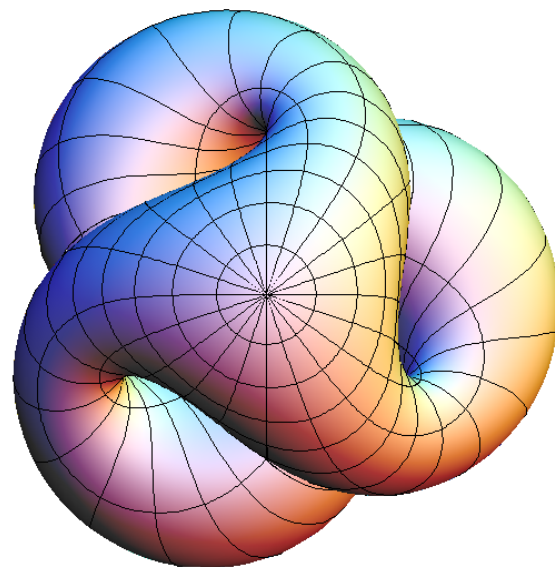


Základy vektorového počtu

Objem

$$V : \begin{cases} x = x(u, v, w) \\ y = y(u, v, w) \\ z = z(u, v, w) \end{cases}$$

$$dV = dx \cdot dy \cdot dz$$



Základy vektorového počtu

**Integrovaní skalární a
vektorové funkce:**

$$\vec{A}(t) = (A_x, A_y, A_z) = A_x(t)\vec{i} + A_y(t)\vec{j} + A_z(t)\vec{k}$$
$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{A}(t)dt = \vec{i} \int_{t_1}^{t_2} A_x(t)dt + \vec{j} \int_{t_1}^{t_2} A_y(t)dt + \vec{k} \int_{t_1}^{t_2} A_z(t)dt$$

množina	pole	integrál	označení
křivka	skalární	křivkový 1. druhu	$\int_C f \, ds$
	vektorové	křivkový 2. druhu	$\int_C \vec{A} d\vec{r}$
plocha	skalární	plošný 1. druhu	$\iint_S f \, dS$
	vektorové	plošný 2. druhu	$\iint_S \vec{A} d\vec{S}$
objem	skalární	objemový	$\iiint_V f \, dV$

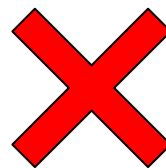
Charakteristiky fyzikálních polí

skalární pole S

$$S(\vec{r}, t) = f(\vec{r}, t)$$

skalární veličina je popsána
v daném místě prostoru a v
čase jednou hodnotou S
(např. teplota, tlak,...)

při transformaci souřadnic
se hodnota nemění



vektorové pole $\mathbf{v}$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = A_x(\vec{r}, t)\vec{i} + A_y(\vec{r}, t)\vec{j} + A_z(\vec{r}, t)\vec{k}$$

vektorová veličina je
popsána v daném místě
prostoru a v čase třemi
složkami (A_x, A_y, A_z)
(např. rychlost, síla,...)

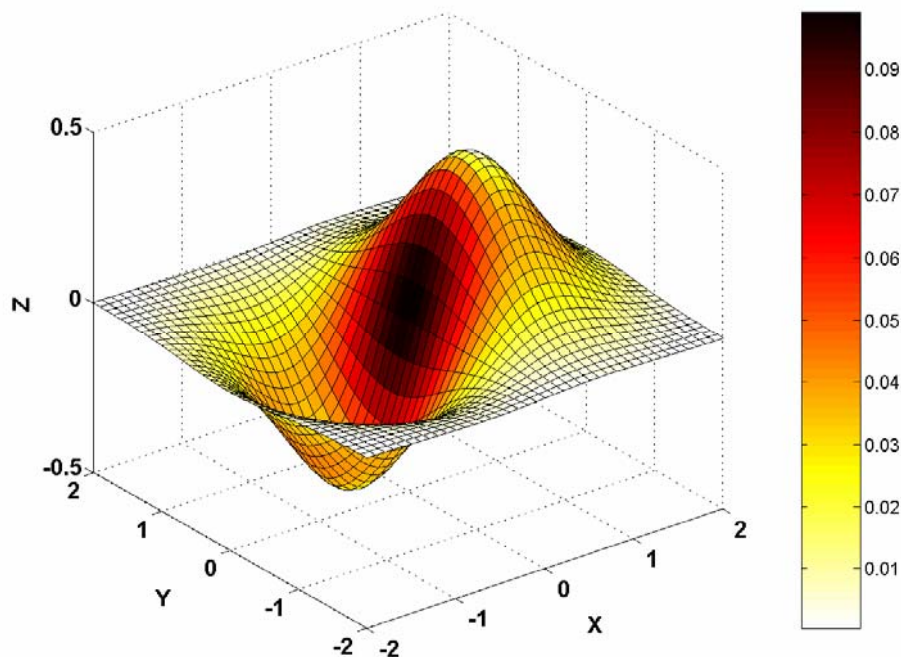
při transformaci souřadnic
se hodnota obecně mění

Charakteristiky skalárních polí

gradient skalární funkce

$$\text{grad } S = \nabla \cdot S = \frac{dS}{d\vec{r}} = \left(\frac{\partial S}{\partial x}, \frac{\partial S}{\partial y}, \frac{\partial S}{\partial z} \right)$$

- výsledkem této diferenciální operace je **vektor**



gradient vyjadřuje vektor směru maximální prostorové změny skalární veličiny S ,

tj. směr, kterým nám v daném místě prostoru daná veličina (např. teplota) nejvíce narůstá

$$z = f(x, y) = x \cdot e^{-(x^2 + y^2)}$$

$$dS = d\vec{r} \cdot \text{grad } S$$

Charakteristiky skalárních polí

totální diferenciál

$$dS = d\vec{r} \cdot \text{grad } S$$

změna skalární funkce v libovolném směru $\vec{n}$

$$\vec{n} \cdot \text{grad } S = \left(\frac{\partial S}{\partial x} n_x + \frac{\partial S}{\partial y} n_y + \frac{\partial S}{\partial z} n_z \right)$$

$$\vec{n} \cdot \vec{i} = \cos \alpha_x \quad \vec{n} \cdot \vec{j} = \cos \alpha_y \quad \vec{n} \cdot \vec{k} = \cos \alpha_z$$

gradient ve sférických souřadnicích

$$\text{grad } S = \left(\frac{\partial S}{\partial r}, \frac{1}{r} \frac{\partial S}{\partial \vartheta}, \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial S}{\partial \varphi} \right)$$

$$\vec{A} = \text{grad } f$$

pokud se dá nějaká veličina A vyjádřit jako gradient jiné veličiny f , potom se jedná o **potenciální pole** a funkce f , se označuje jako **potenciál**

$$f(x, y, z) = \text{konst.}$$

ekvipotenciální plochy
- vektorové pole A má směr normály k ploše

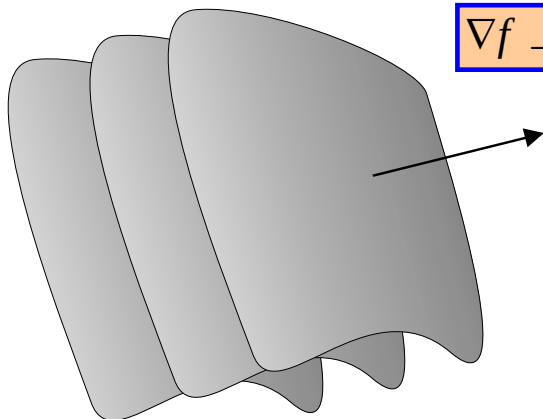
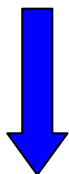
Charakteristiky skalárních polí

$$f(x, y, z) = \text{konst.}$$

ekvipotenciální plochy



$$df = \text{grad } f \cdot d\vec{r} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) (dx, dy, dz)$$



$$\nabla f \perp d\vec{r}$$

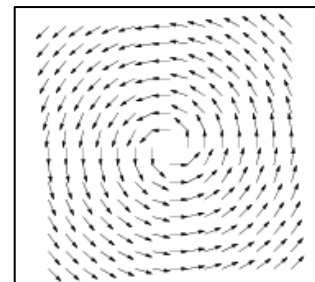
gradient je kolmý
k ekvipotenciální
ploše

Charakteristiky vektorových polí

vektorová pole $\mathbf{v}$

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = A_x(\vec{r}, t)\vec{i} + A_y(\vec{r}, t)\vec{j} + A_z(\vec{r}, t)\vec{k}$$

- ⊕ vektorová pole závislá na polohovém vektoru (např. rychlost proudění, intenzita silového pole,...) se dají se charakterizovat pomocí **vektorových čar**



Vektorové čáry

- ⊕ vektorové čáry jsou křivky, jejichž tečna v každém bodě pole má stejný směr jako daný vektor pole $\mathbf{A}$

$$\vec{A} \times d\vec{r} = 0$$



$$\frac{dx}{A_x} = \frac{dy}{A_y} = \frac{dz}{A_z}$$

$$\vec{A} = \text{grad } f$$



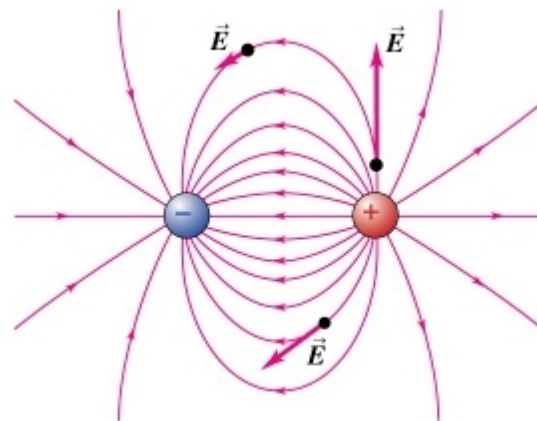
$$\frac{dx}{\partial f / \partial x} = \frac{dy}{\partial f / \partial y} = \frac{dz}{\partial f / \partial z}$$

potenciální pole

Charakteristiky vektorových polí

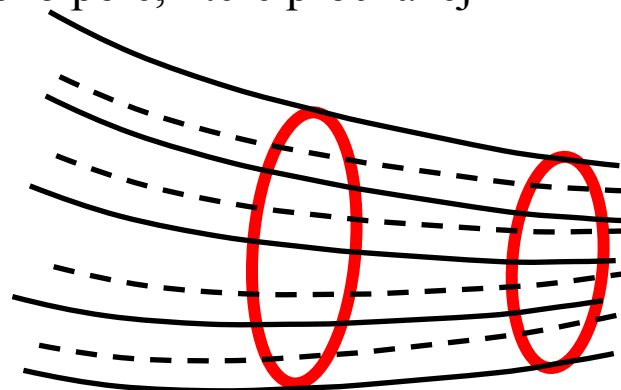
siločáry

- ⊕ vektorové čáry daného vektorového pole
- ⊕ jejich tečna určuje směr vektoru pole
- ⊕ jejich prostorová hustota charakterizuje velikost intenzity pole
- ⊕ pro potenciálové pole se siločáry neprotínají



vektorová trubice

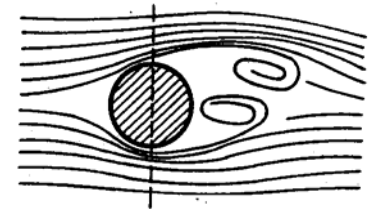
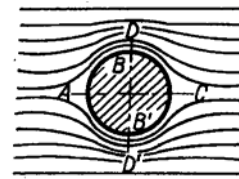
- ⊕ je vytvořena siločárami daného vektorového pole, které procházejí uzavřenou křivkou



Charakteristiky vektorových polí

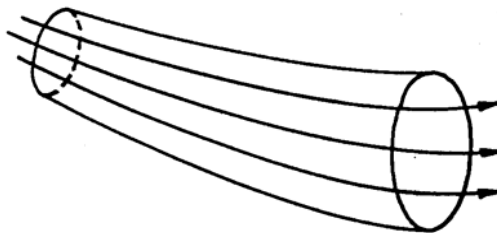
proudočáry

- mají **směr vektoru rychlosti v daném časovém okamžiku**
- můžeme pomocí nich graficky znázornit velikost toku
- v závislosti na typu proudění mohou být otevřené i uzavřené křivky

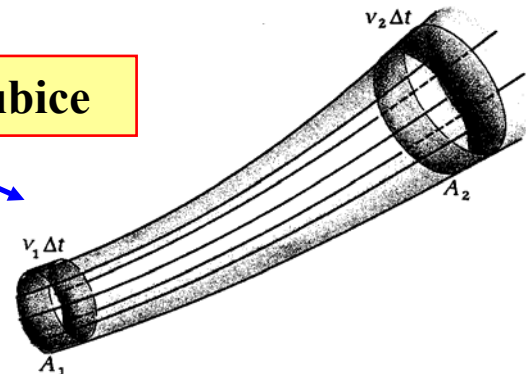


proudové trubice

- myšlené trubice, jejichž stěny jsou tvořeny sousedícími proudočárami.



proudová trubice



Charakteristiky vektorových polí

- ⊕ vektorové čáry mohou vznikat i zanikat a o jejich přírůstku nebo úbytku nás informuje **divergence vektoru pole**
- ⊕ **divergence** – výtok vektoru z objemového elementu jednotkové velikosti

Tok vektoru uzavřenou plochou:

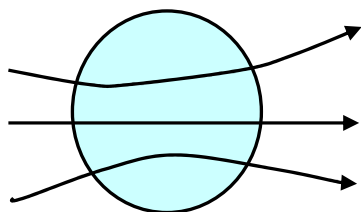
$$N = \oint_{\Delta\Omega} \vec{A} d\vec{\Omega}$$

tok vektoru pole můžeme charakterizovat počtem vektorových čar v daném objemu

$N > 0$... vytéká více než vtéká (zřídla toku)

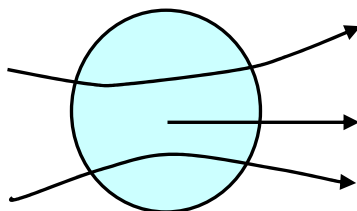
$N < 0$... vytéká méně než vtéká (propady toku)

$N = 0$... stejný vtok i výtok



$$\text{div } \vec{A} = 0$$

pole nezřídlové



$$\text{div } \vec{A} \neq 0$$

pole zřídlové

$$\text{div } \vec{A} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_{\Delta\Omega} \vec{A} d\vec{\Omega} = \frac{dN}{dV}$$

Divergence vyjadřuje to, zda dané vektorové pole (např. pole rychlosti proudící kapaliny, elektromagnetické pole,...) obsahuje v daném místě zdroje či úbytky toku dané veličiny

Umožňuje určit tok daného vektorového pole ve specifikovaném objemu, např. hmotnostní průtok kapaliny

Charakteristiky vektorových polí

⊕ **Tok vektoru ve směru y:**

$$dN_y = dA_y \cdot d\Omega_y = \frac{\partial A_y}{\partial y} dy dx dz = \frac{\partial A_y}{\partial y} dV$$



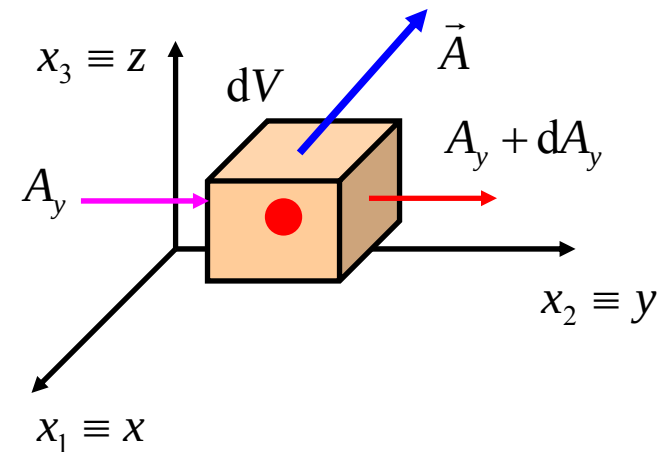
⊕ **Celkový tok vektoru v objemu dV:**

$$dN = dN_x + dN_y + dN_z = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) dV = \text{div } \vec{A} dV$$

Divergence vektorového pole:

$$\text{div } \vec{v} = (\nabla \cdot \vec{v}) = \left(\frac{d}{d\vec{r}} \cdot \vec{v} \right) = \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)$$

- výsledkem této diferenciální operace je **skalár (číslo)**



Gaussova věta:

$$\oint_{\Omega} (\vec{A} \cdot d\vec{\Omega}) = \int_V \text{div } \vec{A} dV$$

Charakteristiky vektorových polí

Rotace vektorového pole:

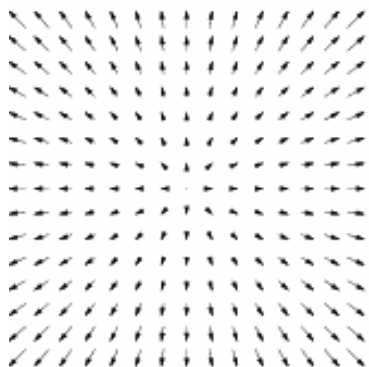
$$C = \oint_{\Gamma} \vec{A} d\vec{r}$$

cirkulací vektoru pole
podél uzavřené křivky
lze charakterizovat
otáčivý pohyb vektoru
pole v daném místě

$$\text{rot } \vec{A} = \vec{n} \left(\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} \oint_{\Gamma} \vec{A} d\vec{r} \right)_{\max} = \vec{n} \left(\frac{dC}{dS} \right)_{\max}$$

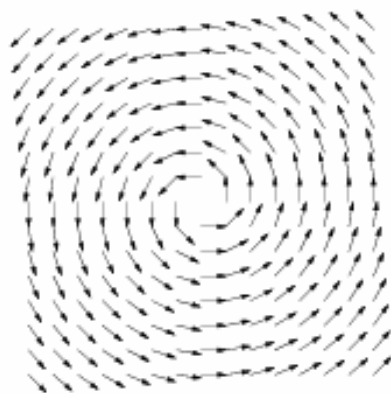
Maximální hodnota cirkulace vektoru pole v daném
bodě po obvodu plošky ΔS

Je-li rotace nulová, není v daném bodě vír v rovině
obdélníka.



$$\text{rot } \vec{A} = 0$$

pole nevírové



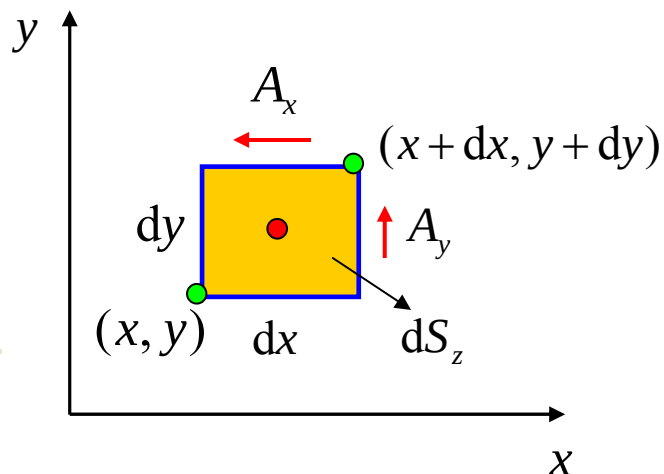
$$\text{rot } \vec{A} \neq 0$$

pole vírové

rotace vyjadřuje to, zda dané
vektorové pole (např. pole
rychlosti proudící kapaliny,
elektromagnetické pole,...) v
daném místě má vírový
charakter

**umožňuje určit, zda vektor
pole koná v daném místě
otáčivý pohyb**

Charakteristiky vektorových polí



elementární cirkulace vektoru
pole v rovinách (x,y) , (x,z) , (y,z)

výsledná cirkulace vektoru pole

Rotace vektorového pole:

$$dC_y = A_y(x+dx)dy - A_y(x)dy = \frac{\partial A_y}{\partial x} dx dy$$

$$dC_x = -A_x(y+dy)dx + A_x(y)dx = -\frac{\partial A_x}{\partial y} dx dy$$

$$dC_{xy} = dC_x + dC_y = \oint \vec{A} \cdot d\vec{l}_z = \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) dS_z$$

$$dC_{xz} = \oint \vec{A} \cdot d\vec{l}_y = \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) dS_y$$

$$dC_{zy} = \oint \vec{A} \cdot d\vec{l}_x = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) dS_x$$

$$dC = dC_{xy} + dC_{xz} + dC_{yz} = \oint \vec{A} \cdot d\vec{l} = \text{rot } \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

$$\text{rot } \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \vec{k}$$

Charakteristiky vektorových polí

- ☉ jestliže některé vektorové čáry jsou uzavřené křivky, pak dochází k otáčivému pohybu vektoru pole, jde o tzv. **vírový pohyb**
- ☉ vírový pohyb je možno charakterizovat **rotací vektoru pole**:

$$\text{rot } \vec{A} = [\nabla \times \vec{A}] = \left[\frac{d}{d\vec{r}} \times \vec{A} \right]$$



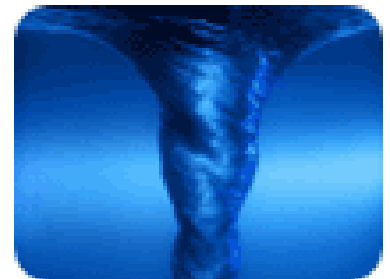
**Př.: rotace rychlosti
jednoho bodu kontinua**

$$\text{rot } \vec{v} = \text{rot } \vec{v}_T + \text{rot} [\vec{\omega} \times \vec{r}] = \text{rot} [\vec{\omega} \times \vec{r}] = 2\vec{\omega}$$

$$\text{rot } \vec{v} = \vec{0} \quad \longrightarrow \quad \vec{\omega} = \vec{0}$$

Stokesova věta:

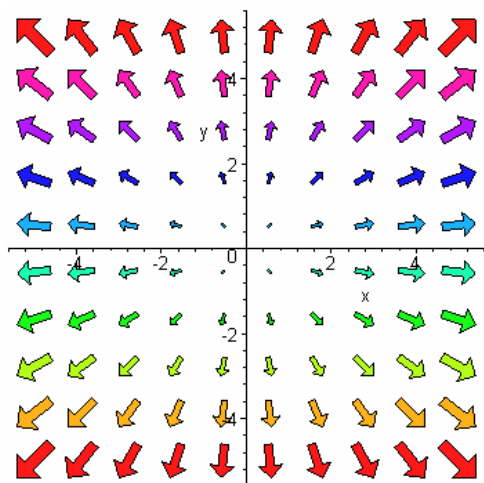
$$\oint_{\Omega} \text{rot } \vec{A} d\vec{\Omega} = \int_{\Gamma} \vec{A} d\vec{r}$$



vírový pohyb

Charakteristiky vektorových polí

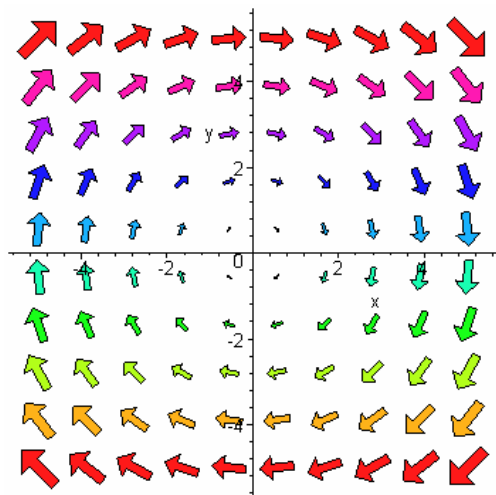
diferenciální operátory – příklad



$$\vec{A} = (x, y, 0)$$

$$\operatorname{div} \vec{A} = 2$$

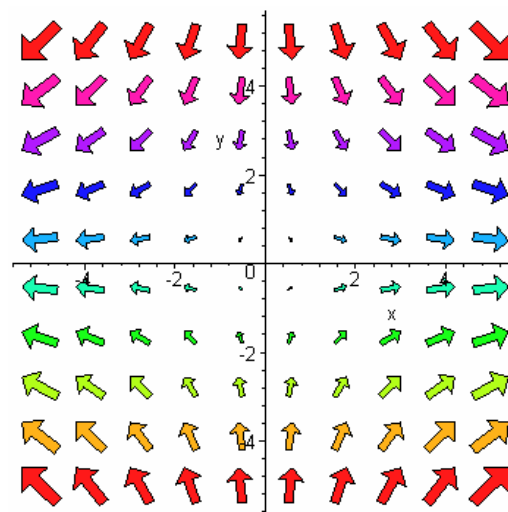
$$\operatorname{rot} \vec{A} = (0, 0, 0)$$



$$\vec{A} = (-y, x, 0)$$

$$\operatorname{div} \vec{A} = 0$$

$$\operatorname{rot} \vec{A} = (0, 0, 2)$$



$$\vec{A} = (x, -y, 0)$$

$$\operatorname{div} \vec{A} = 0$$

$$\operatorname{rot} \vec{A} = (0, 0, 0)$$

Charakteristiky vektorových polí

Integrální teorémy

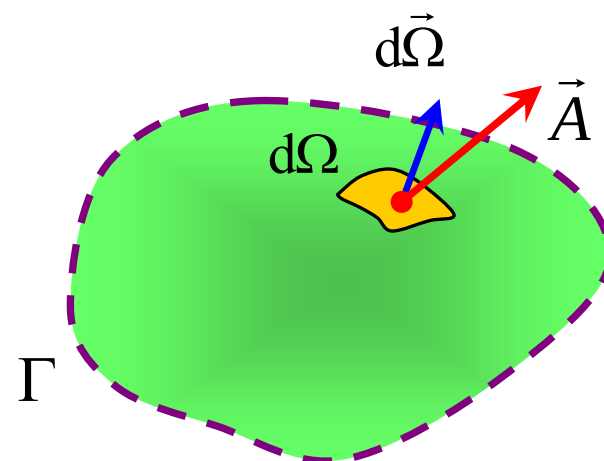
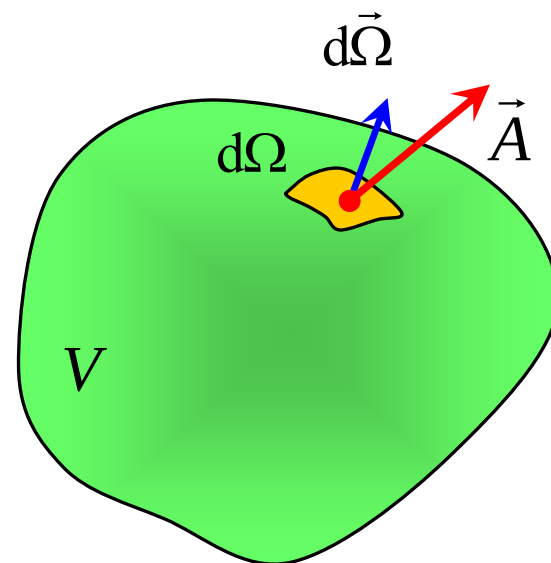
$$\oint_{\Omega} (\vec{A} \cdot d\vec{\Omega}) = \int_V \operatorname{div} \vec{A} dV$$

$$\oint_{\Omega} S d\vec{\Omega} = \int_V \operatorname{grad} S dV$$

$$\oint_{\Omega} (d\vec{\Omega} \times \vec{A}) = \int_V \operatorname{rot} \vec{A} dV$$

$$\oint_{\Omega} (p \cdot \nabla q - q \cdot \nabla p) d\vec{\Omega} = \int_V (p \Delta q - q \Delta p) dV$$

$$\oint_{\Omega} \operatorname{rot} \vec{A} d\vec{\Omega} = \int_{\Gamma} \vec{A} d\vec{r}$$



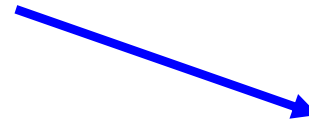
Charakteristiky vektorových polí

Nevírové (potenciální) pole

$$\text{rot } \vec{A} = 0$$



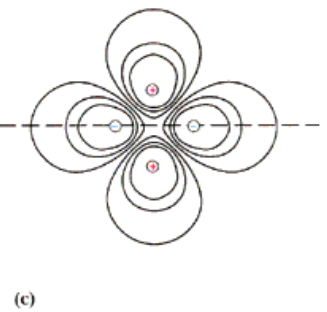
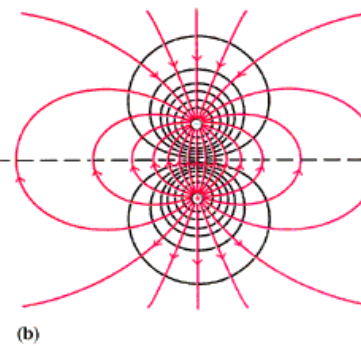
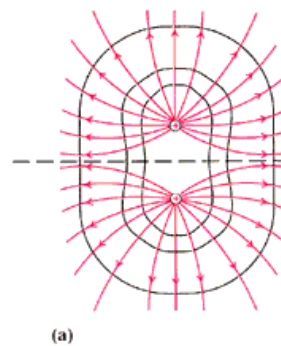
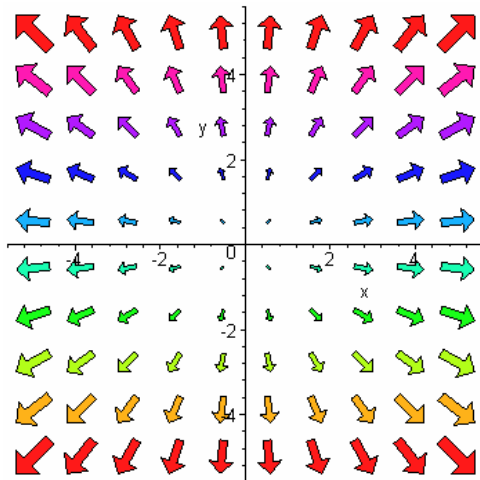
$$\frac{\partial A_x}{\partial y} = \frac{\partial A_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial A_y}{\partial z} = \frac{\partial A_z}{\partial y}, \quad \frac{\partial A_z}{\partial x} = \frac{\partial A_x}{\partial z}$$



$$\vec{A} = -\text{grad } \Phi$$

skalární potenciál

$$C = \oint_{\Gamma} \vec{A} d\vec{r} = 0$$



Charakteristiky vektorových polí

Nezřídlové (solenoidální) pole

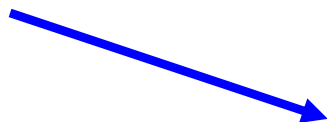
$$\operatorname{div} \vec{A} = 0$$



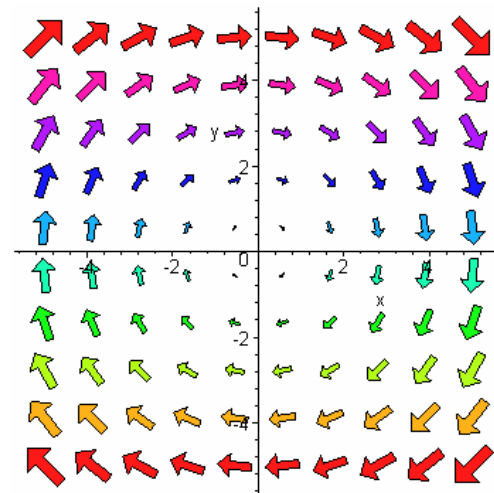
$$\operatorname{div} \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = 0$$

$$\vec{A} = \operatorname{rot} \vec{V}$$

vektorový potenciál

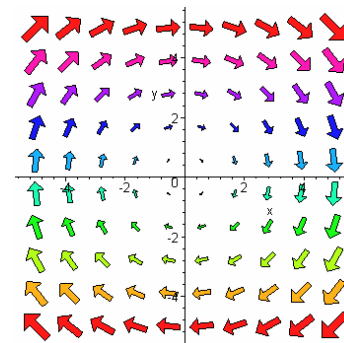
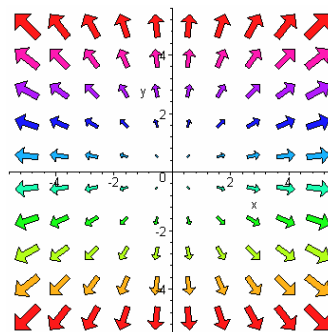


$$N = \oint_{\Delta\Omega} \vec{A} d\vec{\Omega} = 0$$



Obecné vektorové pole

$$\vec{A} = -\operatorname{grad} \Phi + \operatorname{rot} \vec{V}$$



Charakteristiky vektorových polí

Vybrané identity vektorové analýzy

$$\text{grad } f(x_i) = \frac{\partial f}{\partial x_1} \text{grad } x_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \text{grad } x_n$$

$$\text{grad}(fg) = f \cdot \text{grad } g + g \cdot \text{grad } f$$

$$\text{grad}(f + g) = \text{grad } f + \text{grad } g$$

$$\text{grad}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} + (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} + \vec{B} \times \text{rot } \vec{A} + \vec{A} \times \text{rot } \vec{B}$$

$$\text{rot}(\vec{A} + \vec{B}) = \text{rot } \vec{A} + \text{rot } \vec{B}$$

$$\text{rot grad } f = 0$$

$$\text{rot}(\vec{A} \times \vec{B}) = (\vec{B} \cdot \nabla) \vec{A} - (\vec{A} \cdot \nabla) \vec{B} + \vec{A} \text{div } \vec{B} - \vec{B} \text{div } \vec{A}$$

$$\text{rot rot } \vec{A} = \text{grad div } \vec{A} - \Delta \vec{A}$$

$$\text{div}(\vec{A} + \vec{B}) = \text{div } \vec{A} + \text{div } \vec{B}$$

$$\text{div rot } \vec{A} = 0$$

$$\text{div grad } \vec{A} = \nabla^2 \vec{A} = \Delta \vec{A}$$

$$\text{div}(f \cdot \vec{A}) = \vec{A} \cdot \nabla f + f \cdot \text{div } \vec{A}$$

$$\text{div}(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot \text{rot } \vec{A} - \vec{A} \cdot \text{rot } \vec{B}$$

Tenzory

- ⊕ **Tenzor n -tého řádu** obsahuje 3^n prvků, které se při transformaci souřadných soustav transformují přesně definovaným způsobem

$$T_{spqr\dots}^* = \sum_{i,j,k,l,\dots} c_{si} c_{pj} c_{qk} c_{rl} T_{ijkl\dots}$$

**pro otočení
souř.soustavy**

$$c_{ki} = \cos(\vec{e}_k^*, \vec{e}_i)$$

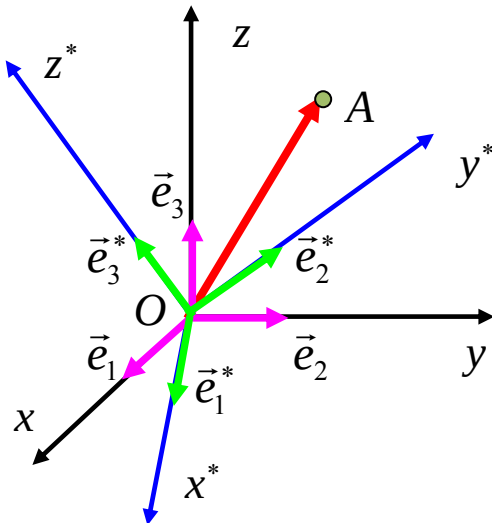
- **tenzor 0.řádu** – skalár (číslo)

- **tenzor 1.řádu** – vektor $A_k^* = \sum_{i=1}^3 c_{ki} A_i$

- **tenzor 2.řádu:** $T_{kl}^* = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 c_{ki} c_{lj} T_{ij}$ 

**9 složek tenzoru
2.řádu lze vyjádřit
pomocí matice**

$$\vec{T} = \begin{pmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{pmatrix}$$



Tenzory

⊕ Hlavní osy a hlavní hodnoty tenzoru:

- taková souřadná soustava, kde **nediagonální složky tenzoru setrvačnosti jsou rovny nule**

$$T_{ij} = 0 \quad i \neq j$$

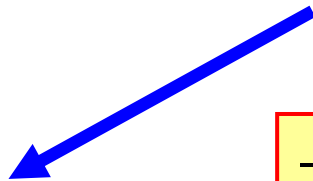
- diagonální složky T_1, T_2, T_3 se poté nazývají **hlavní hodnoty tenzoru**
- osy souřadného systému se nazývají **hlavní osy**

- Platí:

$$\vec{T} \vec{n} = T \vec{n}$$



$$\begin{vmatrix} T_{11} - T & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} - T & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} - T \end{vmatrix} = 0$$



$$T^* = \begin{vmatrix} T_1 & 0 & 0 \\ 0 & T_2 & 0 \\ 0 & 0 & T_3 \end{vmatrix}$$

-u tenzoru setrvačnosti bude např. moment hybnosti mít stejný směr jako vektor úhlové rychlosti

$$\vec{L} = \vec{J} \vec{\omega}$$

- hodnoty T_1, T_2, T_3 jsou extrémní ze všech možných natočení souřadné soustavy

Diferenciální rovnice

Obyčejná diferenciální rovnice 2.řádu s konstantními koeficienty

$$\frac{d^2u}{dt^2} + a \frac{du}{dt} + bu = 0$$

homogenní rovnice



$$\alpha^2 + a\alpha + b = 0$$

charakter.
rovnice



⊕ obecné řešení:

$$u = C_1 e^{\alpha_1 t} + t^m C_2 e^{\alpha_2 t}$$

$$\alpha_1 \neq \alpha_2 \Rightarrow m = 0$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 \Rightarrow m = 1$$

$$\alpha_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2 - 4b}$$