

Mechanické kmitání

⊕ Kmitání (oscilace)

- procesy, které se s určitým stupněm pravidelnosti opakují
- ⊕ sledovaná **fyzikální veličina** (např. výchylka, elektrický proud,..) **osciluje kolem nějaké rovnovážné (střední) hodnoty**
- ⊕ oscilace mohou mít **různou fyzikální podstatu**: (např. mechanické, elektromagnetické, elektromechanické oscilace)

⊕ Oscilátor – soustava, která kmitá (osciluje)

- ⊕ **Kmity volné (vlastní)** – koná soustava ponechána sama sobě, když jsme ji předtím vyvedli z rovnováhy
- ⊕ **Kmity vynucené** – hodnoty všech veličin, které charakterizují danou soustavu, se opakují v pravidelných časových intervalech. Pohyb je opakovaně vynucován vnější silou.

Harmonické kmitání

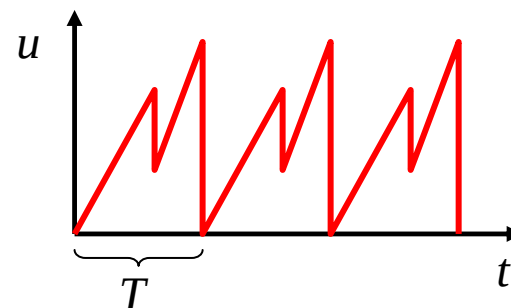
- ⊕ **Periodický průběh** – průběh sledované veličiny X se opakuje s určitou periodou T

$$X(t) = X(t + T)$$

- ⊕ počet oscilací za 1 sekundu vyjadřuje **frekvence kmitavého pohybu** f

$$f = \frac{1}{T}$$

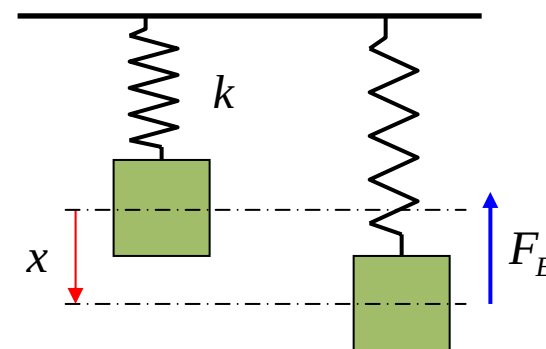
- ⊕ **kruhová frekvence kmitání:** $\omega = 2\pi f$



- ⊕ **harmonické oscilace** – pohyb je udržován působením **elastické (vratné) síly**, která je úměrná výchylce z rovnovážné polohy působí proti výchylce

$$F_E = -kx$$

- ⊕ pohyb je **periodický**
- ⊕ úhlová frekvence ω je konstantní
- ⊕ parametr k vyjadřuje **tuhost oscilační vazby**



Volné harmonické kmitání

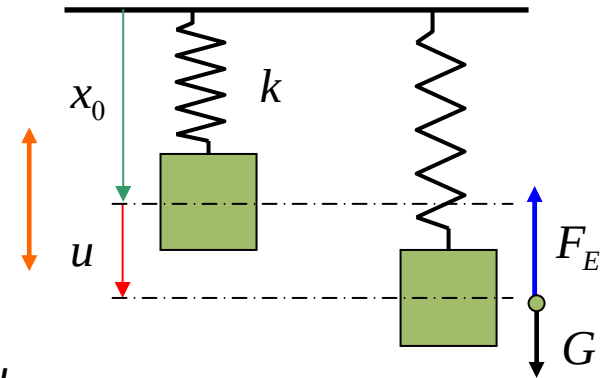
- zanedbáváme síly tření, uvažujeme pouze **konzervativní vratnou sílu** $F_E = -kx$ a konstantní **konzervativní tíhovou sílu** $G = mg$

- v rovnováze platí

$$G = mg = -F_E = kx_0 \quad \longrightarrow \quad x_0 = \frac{mg}{k}$$

- výsledná síla:**

$$F = -kx + mg = -k\left(x - \frac{mg}{k}\right) = -k(x - x_0) = -ku$$



- pohybová rovnice harmonických kmitů:**

$$ma = F \quad \longrightarrow \quad m \frac{d^2 u}{dt^2} + ku = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{d^2 u}{dt^2} + \omega_0^2 u = 0$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

**Kruhová
frekvence
kmitání**

hledáme řešení
ve tvaru

$$u = e^{\alpha t}$$

- Obecné řešení:**

$$u = K_1 e^{\alpha_1 t} + t^m K_2 e^{\alpha_2 t}$$

$$u = C_1 \sin(\omega_0 t) + C_2 \cos(\omega_0 t)$$

$$\alpha_{1,2} = \pm i\omega_0 \quad \longleftarrow \quad \alpha^2 + \omega_0^2 = 0$$

Volné harmonické kmitání



Označíme-li: $C_1 = A \cos \varphi$

$$C_2 = A \sin \varphi$$

$$u = C_1 \sin(\omega_0 t) + C_2 \cos(\omega_0 t)$$



Výchylka:

$$u = A \sin(\omega_0 t + \varphi)$$



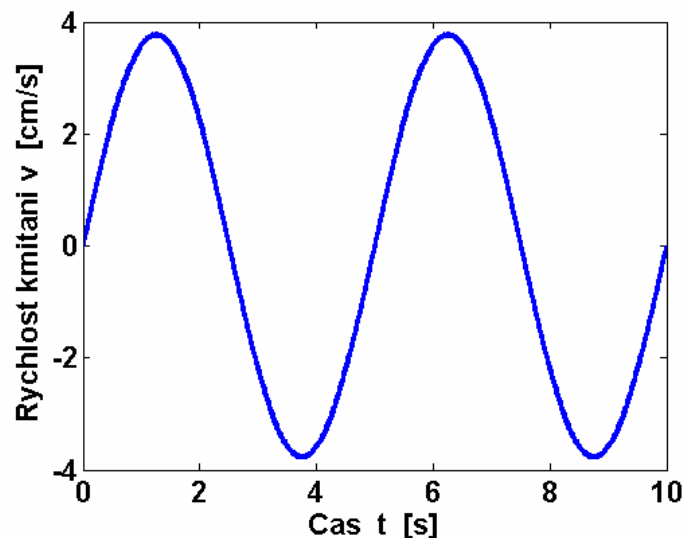
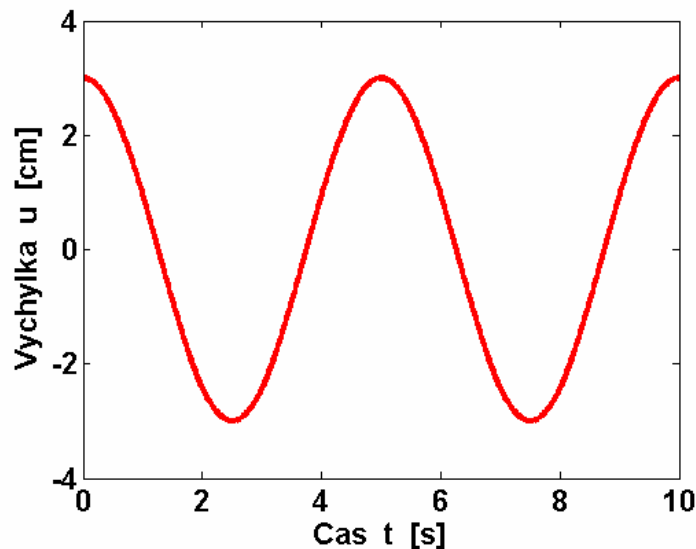
Rychlost:

$$v = \frac{du}{dt} = A\omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi) = v_{\max} \cos(\omega_0 t + \varphi)$$



Zrychlení:

$$a = \frac{dv}{dt} = -A\omega_0^2 \sin(\omega_0 t + \varphi) = a_{\max} \sin(\omega_0 t + \varphi)$$



Volné harmonické kmitání

⊕ **Mechanická energie** W_M je rovna součtu energie kinetické W_K a energie potenciální W_P :

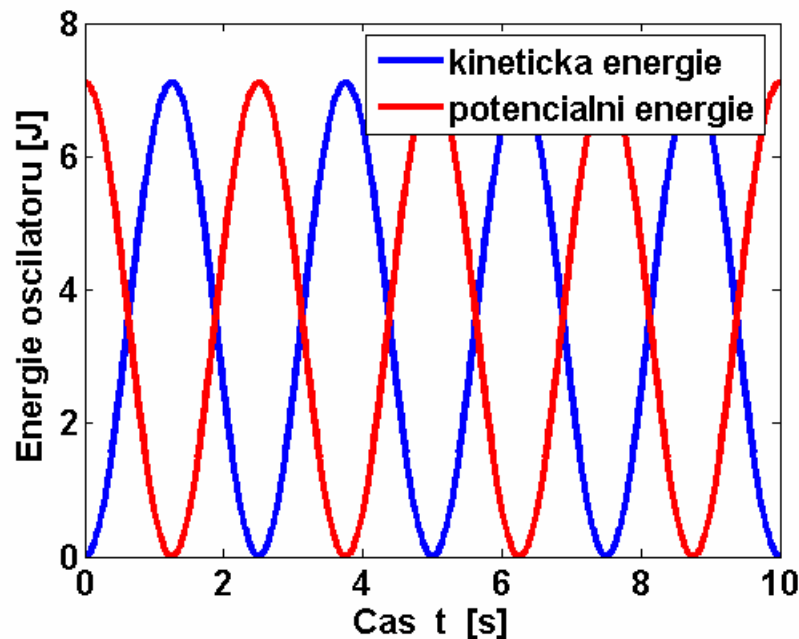
$$W_M = W_K + W_P = \frac{1}{2}mA^2\omega_0^2 = \frac{1}{2}mv_{\max}^2$$

**kinetická
energie**

$$W_K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega_0^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)$$

**potenciální
energie**

$$W_P = -\int_0^u F du = \int_0^u ku du = \frac{1}{2}ku^2 = \frac{1}{2}mA^2\omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi)$$



Volné harmonické kmitání

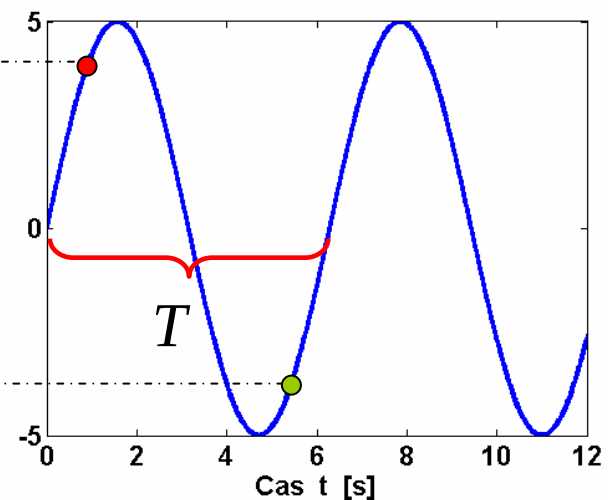
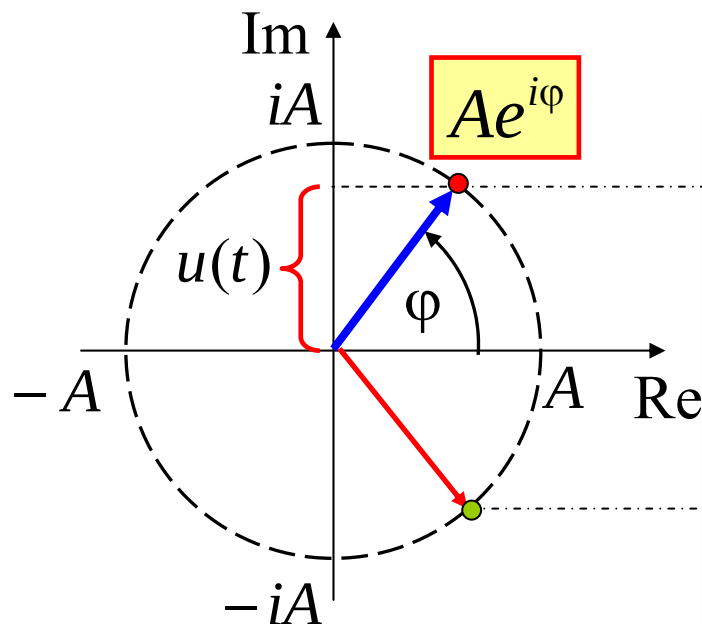
- ⊕ Často je výhodné vyjádřit harmonické kmity pomocí komplex.funkcí

$$\tilde{u} = Ae^{i(\omega_0 t + \varphi)}$$

$$u = \text{Im}(\tilde{u}) = A \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

- ⊕ obdobně lze vyjádřit harmonické kmity pomocí funkce

$$u = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$$



Volné harmonické kmitání

Příklad: (nárazník vagónu)

- určete maximální rychlost vagónu o hmotnosti m , jestliže má 2 nárazníkové pružiny o tuhosti k s maximálním možným zkrácením y_m
- určete též přibližně dobu nárazu (stlačení) T_n a max.sílu F_m

$$\Delta W_K = \Delta W_p$$



$$\frac{1}{2}mv_m^2 = \frac{1}{2}k^*y_m^2 \longrightarrow v_m = \sqrt{\frac{2k}{m}}y_m = 6,5 \text{ km/hod.}$$



$$F_m = k^*y_m = 2ky_m = 10^6 \text{ N}$$



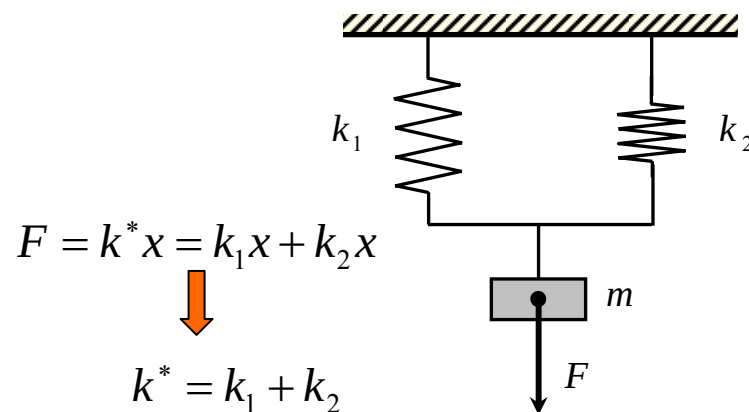
$$T_n = \frac{T}{4} = \frac{2\pi}{4\omega_0} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{k}} \doteq 0,09 \text{ s}$$

$$y_m = 10 \text{ cm}$$

$$m = 30 \text{ t}$$

$$k = 5 \cdot 10^6 \text{ N/m}$$

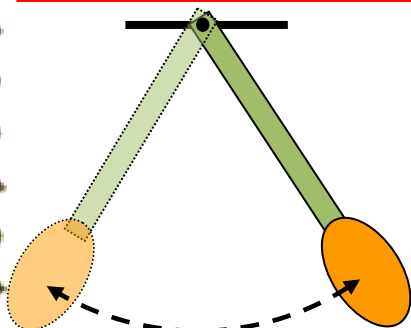
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \doteq 18,3 \text{ s}^{-1}$$



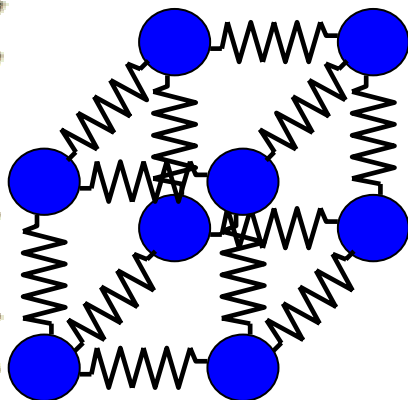
paralelně spojené
pružiny

Kmitání - příklady

Příklady kmitavých pohybů:



kyvadla



atomy v
krystal.mřížce

Bungee Jumping from the Verzasca Dam Switzerland

(C)2000 D.J.Williams

Video

- a) bungee jumping
- b) odskok kuliček



Tlumené kmitání

- ⊕ pohybový stav je ovlivňován nejen silou kvazielasticitou, ale také silou tlumící pohyb (**disipativní síla**) $\vec{F} = \vec{F}_E + \vec{F}_T$

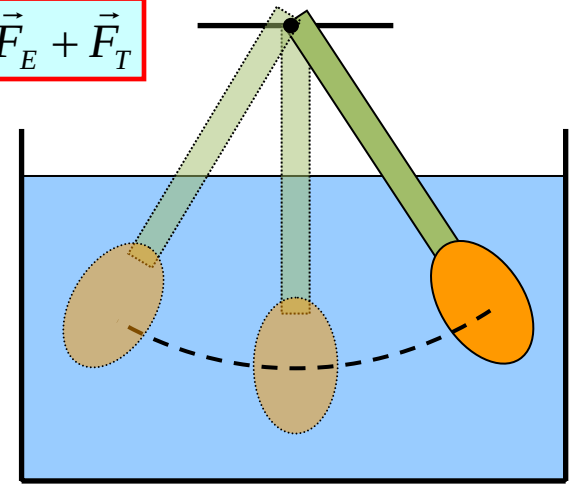
$$\vec{F}_E = -m\omega_0^2 \vec{u}$$

elastická síla

$$\vec{F}_T = -B\vec{v} = -2mb \frac{d\vec{u}}{dt}$$

tlumící síla

- součinitel útlumu: $b = \frac{B}{2m} > 0$



- ⊕ pohybová rovnice tlumených kmitů:

$$m \frac{d^2 u}{dt^2} = F = -m\omega_0^2 u - 2mb \frac{du}{dt} \quad \Rightarrow$$

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + 2b \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = 0$$

$$\alpha^2 + 2b\alpha + \omega_0^2 = 0$$

**charakter.
rovnice**

- ⊕ obecné řešení:

$$u = C_1 e^{\alpha_1 t} + t^m C_2 e^{\alpha_2 t}$$

$$\alpha_{1,2} = -b \pm \sqrt{b^2 - \omega_0^2}$$

Tlumené kmitání

A) Aperiodický pohyb s nadkrit.útlumem:

$$b > \omega_0 \quad \alpha_{1,2} \dots \text{reálné}$$

• obecné řešení:

$$u = C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 e^{\alpha_2 t}$$

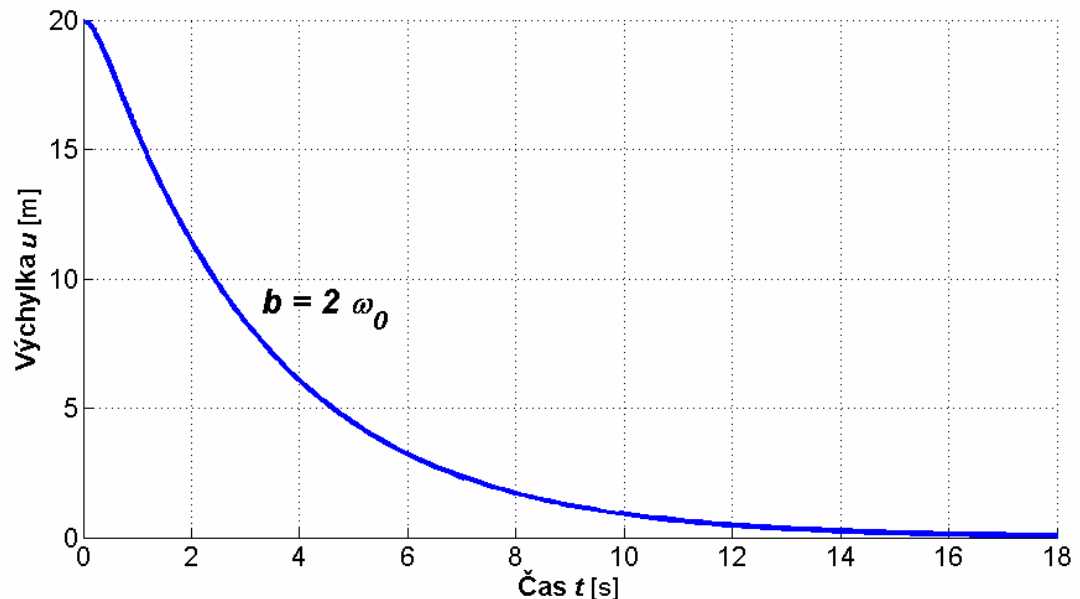
• rychlost kmitání:

$$v = \frac{du}{dt} \longrightarrow v = \alpha_1 C_1 e^{\alpha_1 t} + \alpha_2 C_2 e^{\alpha_2 t}$$

• počáteční podmínky:

$$t = 0 \Rightarrow u = A_M, \quad v = 0$$

$$u = \frac{A_M}{\alpha_1 - \alpha_2} (\alpha_1 e^{\alpha_2 t} - \alpha_2 e^{\alpha_1 t})$$



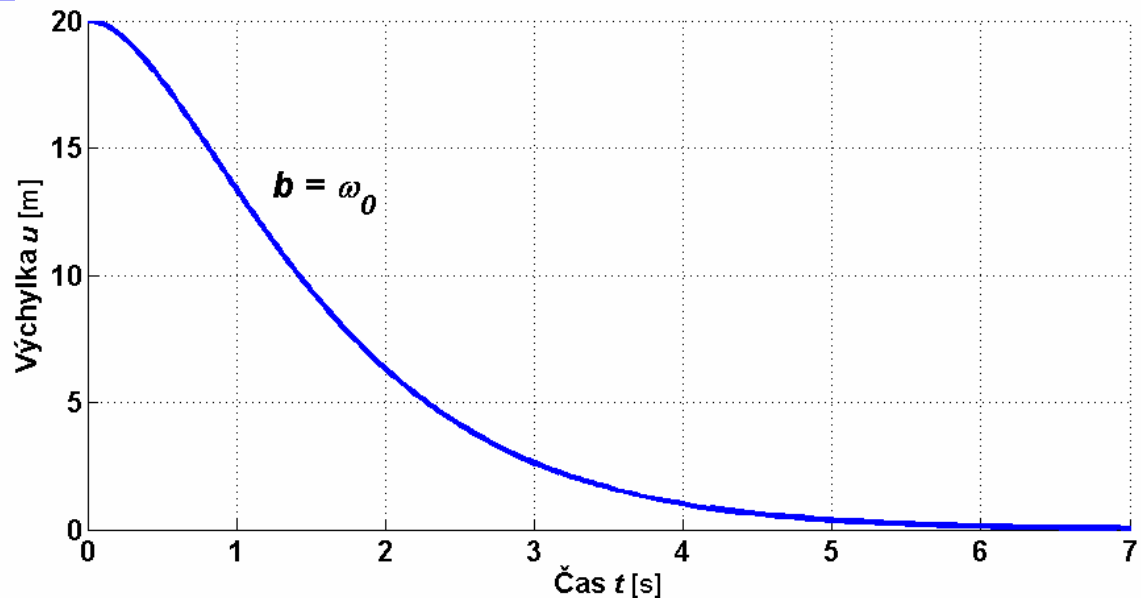
Tlumené kmitání

B) Aperiodický pohyb s kritickým útlumem:

$$b = \omega_0 \quad \alpha_{1,2} = -\omega_0$$

- obecné řešení: $u = e^{-\omega_0 t} (C_1 + C_2 t)$
- rychlost kmitání: $v = e^{-\omega_0 t} (C_2 (1 - \omega_0 t) - \omega_0 C_1)$
- počáteční podmínky: $t = 0 \Rightarrow u = A_M, \quad v = 0$

$$u = A_M e^{-\omega_0 t} (1 + \omega_0 t)$$



Tlumené kmitání

C) Tlumený kmitavý pohyb :

$$b < \omega_0 \quad \alpha_{1,2} = -b \pm i\sqrt{\omega_0^2 - b^2} = -b \pm i\omega$$

• obecné řešení:

$$u = e^{-bt} (C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t)$$

$$C_1 = A \cos \varphi \quad C_2 = A \sin \varphi$$

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - b^2} = \frac{2\pi}{T}$$

kruhová frekvence
tlumených kmitů

$$u = Ae^{-bt} \sin(\omega t + \varphi)$$

amplituda
kmitů $A(t)$

počáteční
fáze kmitání

• rychlost kmitání:

$$v = Ae^{-bt} \{ \omega \cos(\omega t + \varphi) - b \sin(\omega t + \varphi) \}$$

• perioda kmitání:

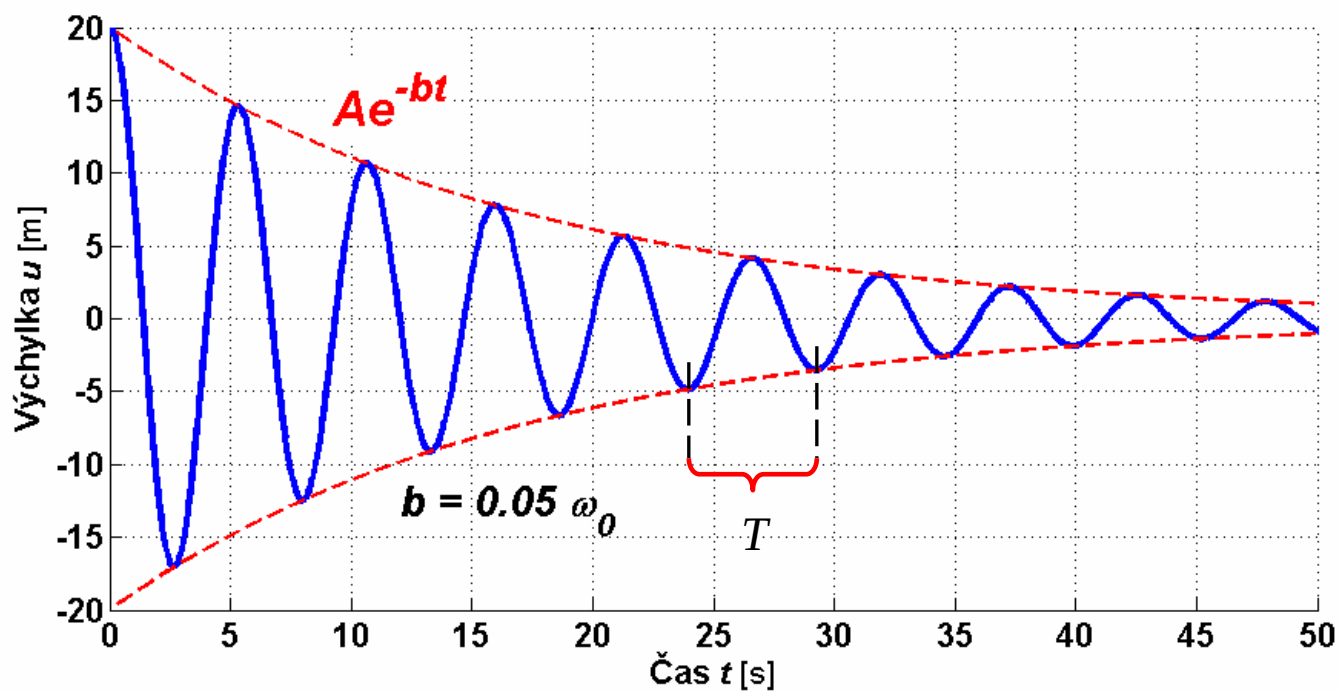
$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - b^2}}$$

Tlumené kmitání

C) Tlumený kmitavý pohyb :

$$u = Ae^{-bt} \sin(\omega t + \varphi)$$

kmitavý pohyb s
klesající amplitudou



Tlumené kmitání

Charakteristiky tlumeného pohybu:

- **útlum:**

-podíl dvou výchylek soustavy, lišících se o 1 periodu

$$\delta = \frac{u(t)}{u(t+T)} = e^{bT}$$

- **logaritmický dekrement útlumu:**

$$\vartheta = \ln \delta = bT$$

- **činitel jakosti kmitající soustavy:**

- 2π násobek poměru energie oscilátoru $W(t)$ k úbytku energie soustavy za dobu 1 periody

$$W(t) = \frac{1}{2} m \omega^2 A^2(t) \quad \longrightarrow$$

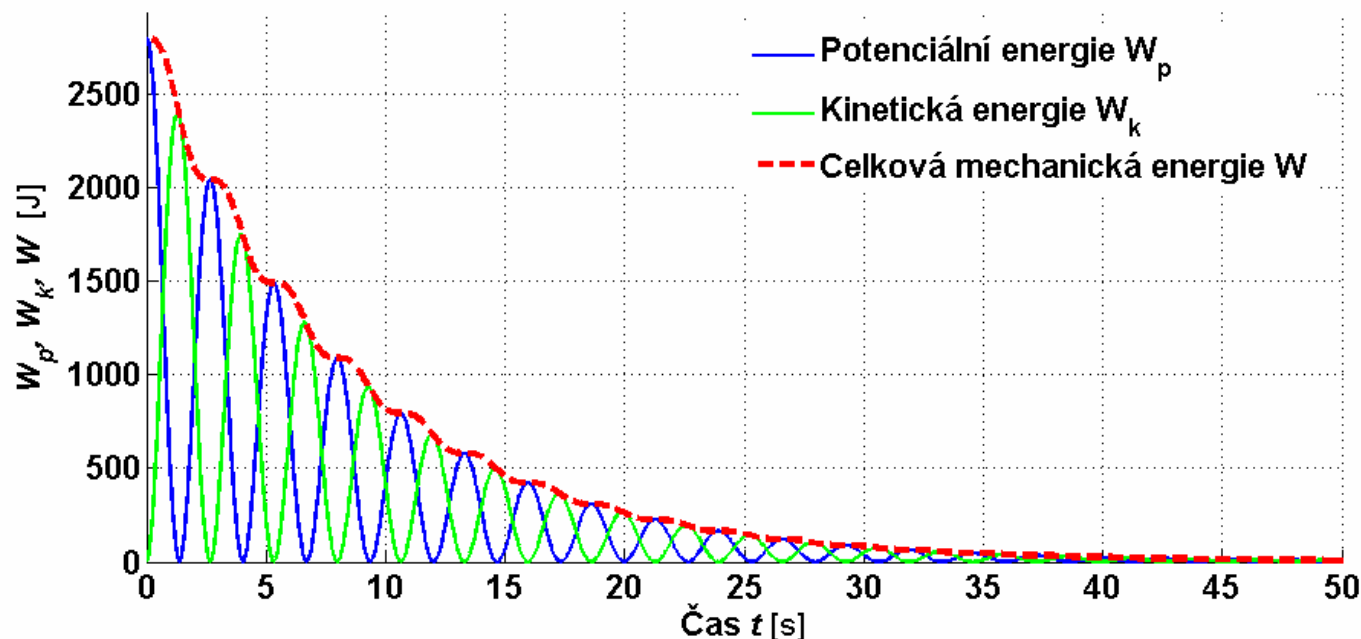
$$Q = 2\pi \frac{W(t)}{W(t) - W(t+T)} = \frac{2\pi}{1 - e^{-2bT}}$$

vyjadřuje kvalitu
oscilátoru

Tlumené kmitání - energie

⊕ **Mechanická energie soustavy:**

$$W = \frac{1}{2} m \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} k u^2$$



⊕ **Úbytek energie:**

$$\frac{dW}{dt} = \frac{du}{dt} \left[m \frac{d^2u}{dt^2} + ku \right] = \frac{du}{dt} \left(-B \frac{du}{dt} \right) = -B \left(\frac{du}{dt} \right)^2 = -Bv^2 < 0$$

Vynucené harmonické kmitání

- ⊕ Chceme-li zachovat oscilace soustavy, potom na bod musí působit periodická síla, tzv. **síla budící** $F_V = F(t)$, která dodává kmitající soustavě mechanickou energii (např. nápory větru, mechanické vibrace,...)

- **harmonická budící síla:**

$$F_V = F_M \sin \Omega t$$



- pohybová rovnice **vynucených tlumených kmitů**:

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + 2b \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = \frac{F_M}{m} \sin \Omega t$$

- **obecné řešení** ve tvaru:



$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - b^2}$$

$$b < \omega_0$$



$$u = Ae^{-bt} \sin(\omega t + \varphi) + A_V \sin(\Omega t + \alpha)$$

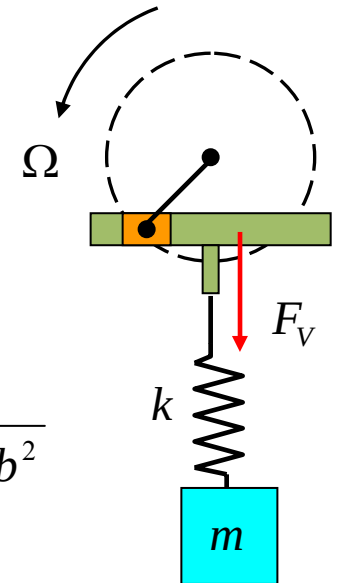
**zakmitávání
soustavy**



tlumené kmity

**harmonické
kmity**

**ustálené kmitání
soustavy**



Vynucené harmonické kmitání

⊕ dosazením partikulárního řešení do pohyb.rovnice: $u_p = A_v \sin(\Omega t + \alpha)$

$$A_v = \frac{F_M}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4b^2\Omega^2}}$$

**amplituda
ustálených kmitů**

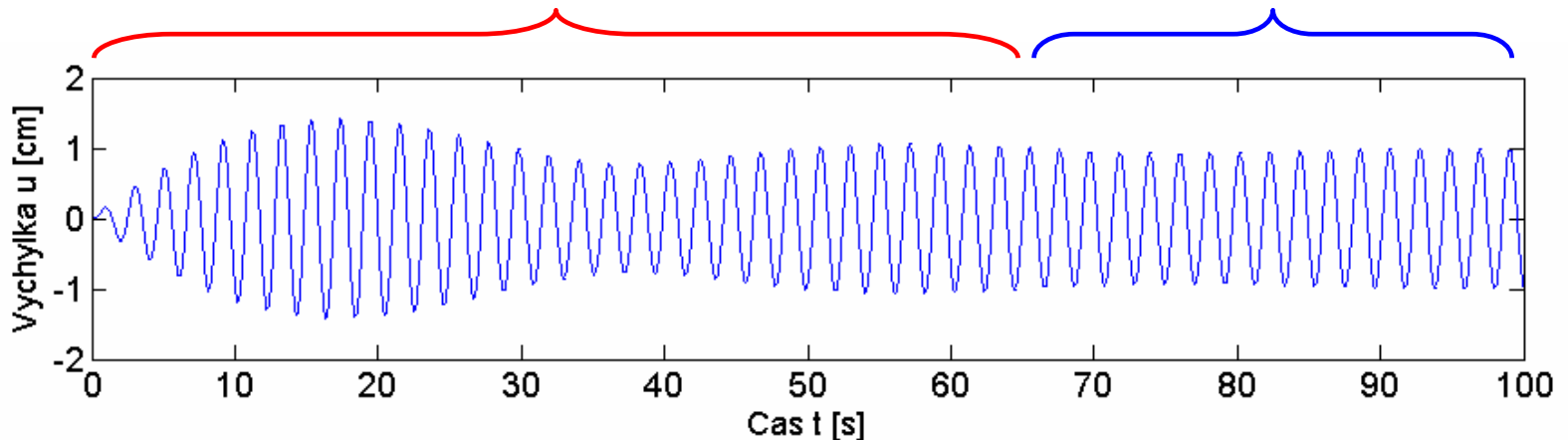
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{-2b\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$$

**fázový posun síly
a výchylky**

$$u = Ae^{-bt} \sin(\omega t + \varphi) + A_v \sin(\Omega t + \alpha)$$

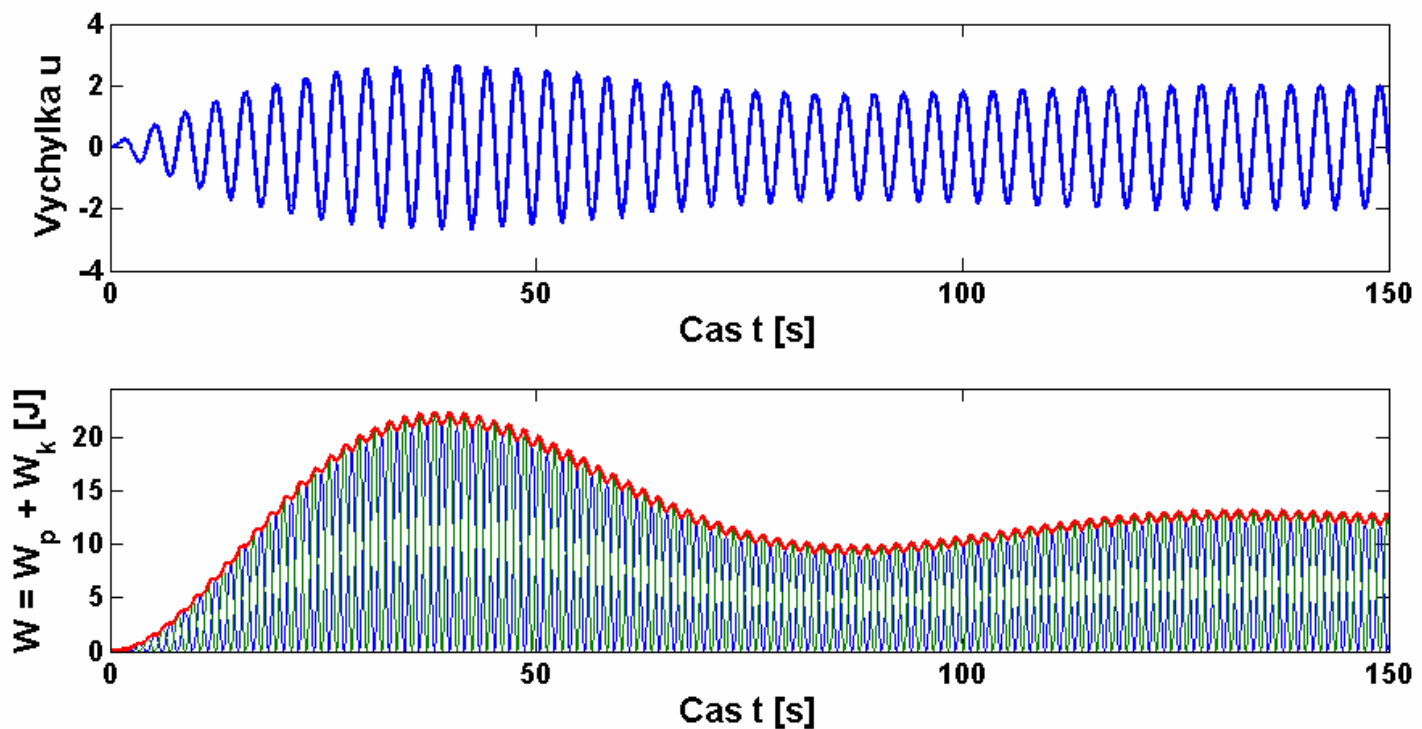
zakmitávání

ustálené kmitání



Vynucené harmonické kmitání

V první fázi (tzv. zakmitávání)
mohou výchylky překročit
max. výchylku ustálených
vynucených kmitů soustavy



Vynucené kmity - rezonance

⊕ **Amplituda** vynucených kmitů závisí na frekvenci Ω , tj. $A_V = A_V(\Omega)$

⊕ hledejme frekvenci Ω , kdy je **amplituda maximální**

**amplitudová
rezonance**

$$A_V = \frac{F_M}{m\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4b^2\Omega^2}}$$

$$\frac{dA_V}{d\Omega} = 0$$



$$\Omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2b^2}$$



**rezonanční
frekvence**



$$A_{V,\max} = \frac{F_M}{2bm\sqrt{\omega_0^2 - b^2}}$$



**max. hodnota
rezonanční
amplitudy**

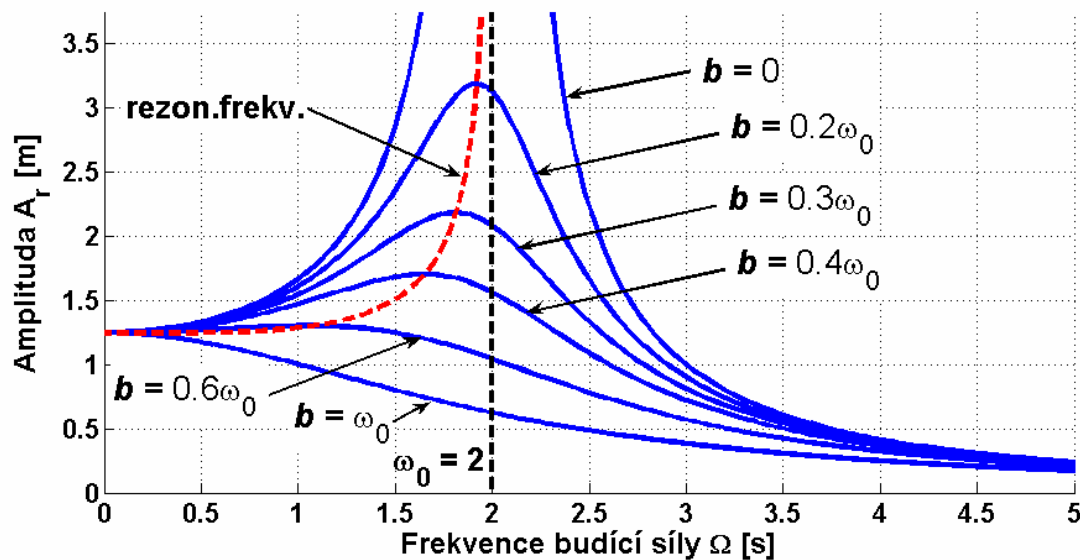
• jelikož v praxi $b \ll \omega_0$



$$\Omega_R \approx \omega_0$$

Vynucené kmity – rezonance

Rezonanční
křivky:

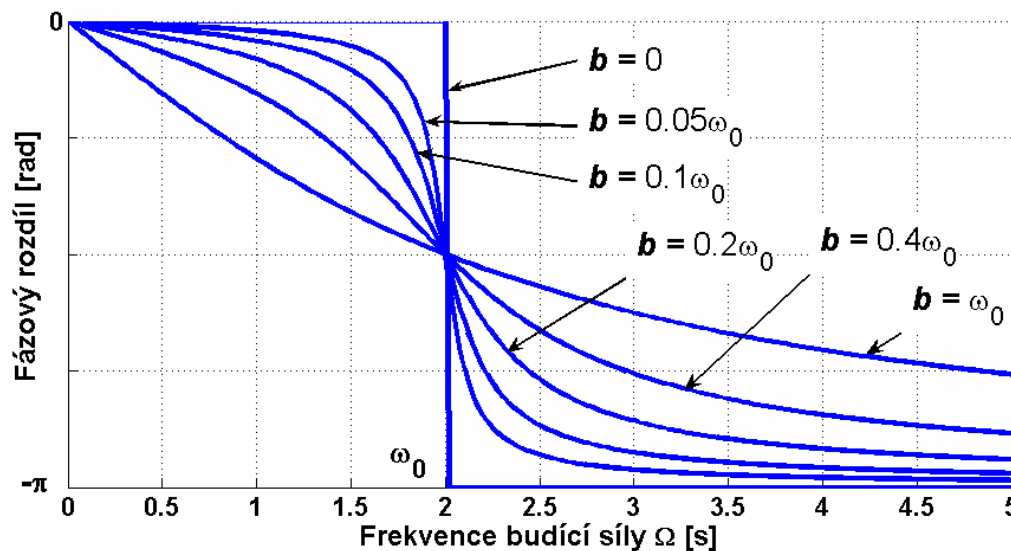


Fázový posuv α
při rezonanci:

$$\Omega = \Omega_R$$



$$\alpha = -\frac{\pi}{2}$$



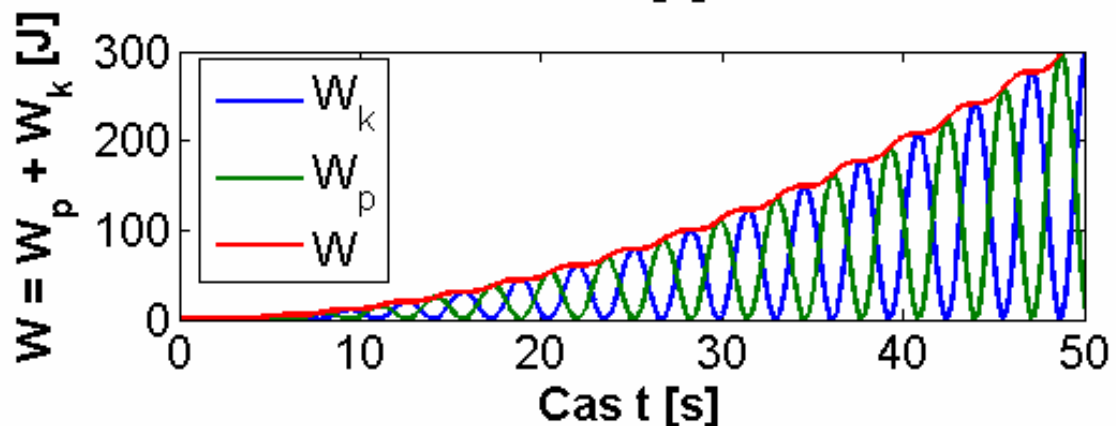
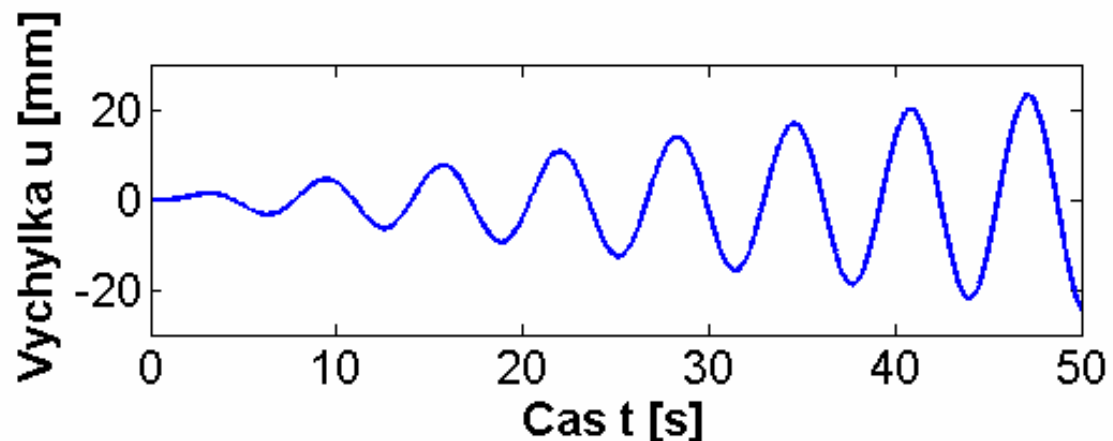
Vynucené kmity – rezonance

Výchylka a energie značně rostou i při nepatrné vynucující síle

Rezonance

$F_M = 1 \text{ N}$, $m = 1 \text{ t}$

$b = 0.0001 \omega_0$



$$W = \frac{1}{2} m \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} k u^2$$

Vynucené kmity – rezonance

⊕ Úbytek mech. energie za periodu T (ustálený stav):

$$\frac{dW}{dt} = -Bv^2 < 0 \quad \longrightarrow \quad \Delta_T W = -B \int_0^T v^2 dt = -BA_v^2 \Omega^2 \int_0^T \cos^2(\Omega t + \alpha) dt = -BA_v^2 \Omega^2 \frac{T}{2}$$

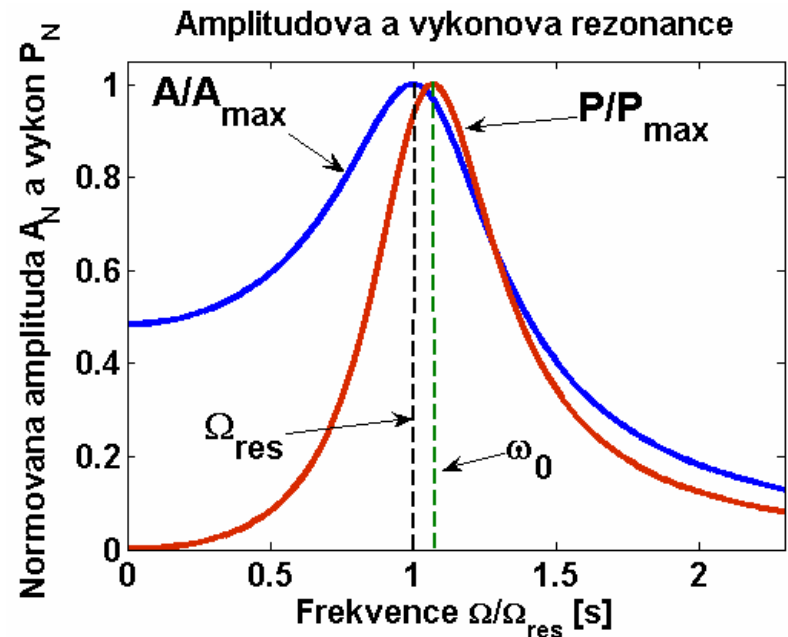
⊕ Střední hodnota výkonu za jednu periodu T :

$$\bar{P} = -\frac{\Delta_T W}{T} = -b mA_v^2 \Omega^2$$

$$b = \frac{B}{2m} > 0$$

**výkonová
rezonance**

Výkon dodávaný vynucující silou je v ustáleném stavu roven výkonu disipativní síly

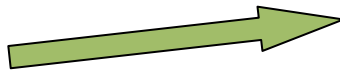


Vynucené kmity – rezonance

- činitel jakosti kmitající soustavy Q :

- 2π násobek poměru průměrné energie oscilátoru $W(t)$ k úbytku energie soustavy za dobu 1 periody

$$\bar{W} = \frac{1}{2} m \omega_0^2 A_V^2$$



$$Q = 2\pi \frac{\bar{W}}{|\Delta_T W|} = \frac{\omega_0^2}{2b\Omega}$$

- úbytek energie během 1 periody:

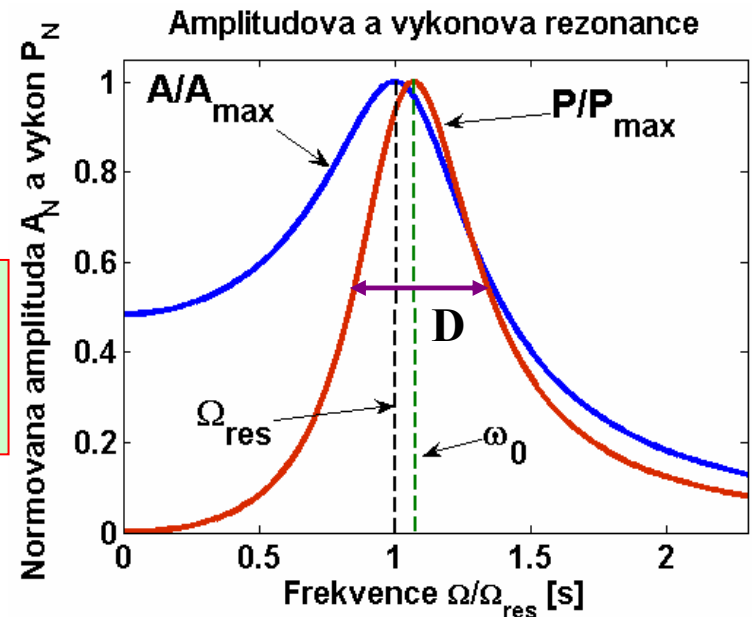
$$\Delta_T W(t) = -\bar{P}T = -bmA_V^2\Omega^2T = -2\pi bmA_V^2\Omega$$

tato energie je doplňována
vynucující silou během jedné periody
ustálených vynucených kmitů

malá energie dodávaná během
1 kmitu může zajišťovat
vysokou energii oscilátoru

$$\bar{W} = \frac{1}{2\pi} Q |\Delta_T W|$$

čím užší rezonanční křivka D
tím výraznější rezonance $D \sim 1/Q$



Vynucené kmity – rezonance

⊕ Příklad: (destrukce rezonancí)

Most Tacoma Narrows Bridge

1940 spadl v důsledku torzních kmitů mostní konstrukce, které byly způsobeny rezonancí mostu s nárazy větru



Vynucené kmity – rezonance

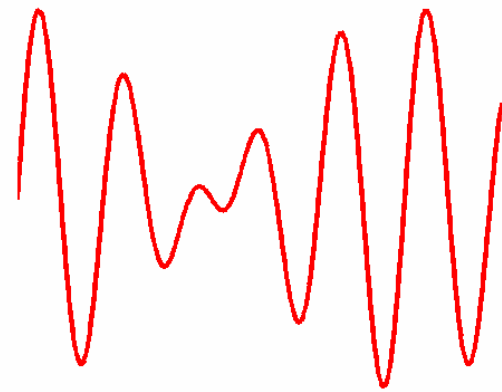
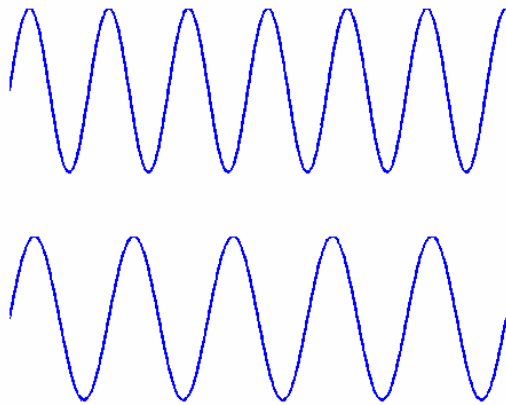
Animace - Tacoma Narrows Bridge



Skládání kmitání

- ⊕ Jelikož diferenciální rovnice kmitání je **lineární**, platí **princip superpozice**:

$$m \frac{d^2 u_i}{dt^2} + C \frac{du_i}{dt} + Du_i = F_i(t) \quad \longrightarrow \quad u = u_1 + u_2 + \dots$$



- ⊕ **Volné harmonické oscilace 1D :**

$$u = u_1 + u_2 + \dots = A_1 \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_2) + \dots$$

- **periodické kmitání** vznikne pouze tehdy:

$$\sin(\omega_i(t + T) + \varphi_i) = \sin(\omega_i t + \varphi_i) \quad \longrightarrow \quad \omega_i T = 2\pi n, \quad n \dots \text{celé číslo}$$

perioda složených kmitů

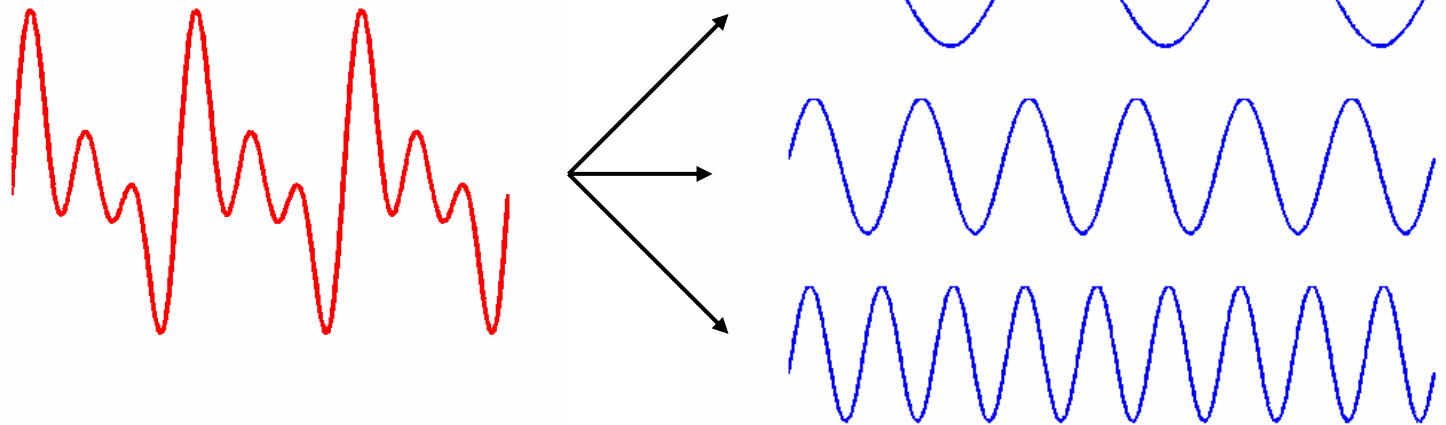
$$T = n_1 T_1 = n_2 T_2 = \dots$$

Skládání kmitání

⊕ Harmonická analýza kmitavého pohybu:

- každý periodický pohyb se obecně dá rozložit na jednotlivé harmonické pohyby s frekvencemi $f, 2f, 3f, \dots$, kde frekvence f se nazývá **1.harmonická** a její násobky tzv. **vyšší harmonické**.
- rozklad je možno provést pomocí **Fourierovy analýzy**

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \cos(k\omega t) + \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin(k\omega t)$$



Skládání kmitání

⊕ Skládání kmitů stejných frekvencí:

$$u_1 = A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) \quad u_2 = A_2 \sin(\omega t + \varphi_2)$$

- výsledný pohyb je periodický se stejnou frekvencí $u = A \sin(\omega t + \varphi)$

$$u = u_1 + u_2 = \sin \omega t (A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2) + \cos \omega t (A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2)$$

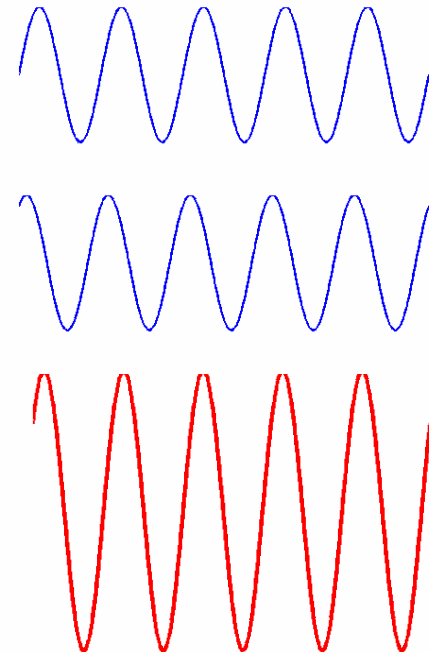


Amplituda:

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$$

Fázové posunutí:

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2}$$



Skládání kmitání

⊕ Skládání kmitů blízkých frekvencí:

- zjednodušující předpoklad: $A = A_1 = A_2$

$$u = u_1 + u_2 = A \sin(\omega_1 t + \varphi_1) + A \sin(\omega_2 t + \varphi_2) = \\ = 2A \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right) \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right)$$

pomalu proměnná
amplituda $A(t)$

harmonický kmitavý
pohyb

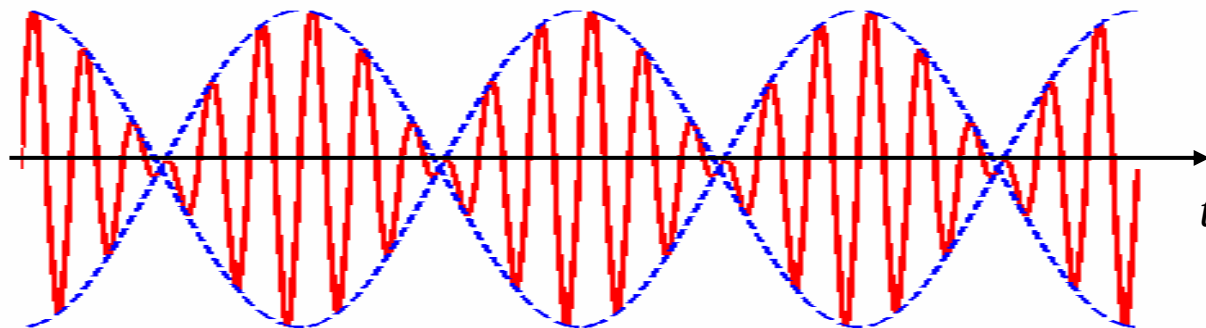
$$\omega_1 \neq \omega_2 \quad |\omega_2 - \omega_1| \ll \omega_2 + \omega_1$$

- vznikají kmity pomalu proměnné amplitudy – **vznik rázů** (kolísání intenzity) s frekvencí: $f = |f_1 - f_2|$

Skládání kmitání - rázy

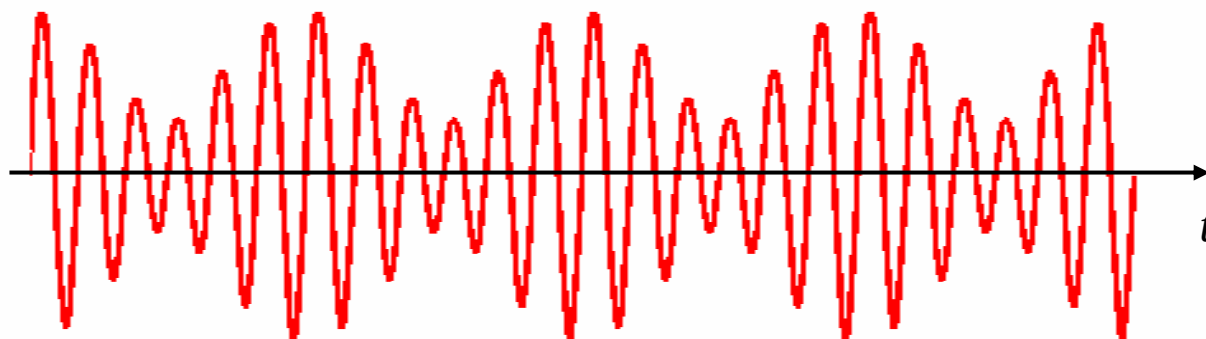
- pokud:

$$A = A_1 = A_2$$



- pokud:

$$A_1 \neq A_2$$



Skládání kmitání – 2D

⊕ platí **princip superpozice**: $\vec{u} = \vec{u}_1 + \vec{u}_2 + \dots$

• skládání **kmitů v kolmých směrech (x,y)**:

$$x = A_1 \sin(\omega_1 t)$$

$$y = A_2 \sin(\omega_2 t + \varphi_0)$$

• pokud platí: $\omega_1 = \omega_2 = \omega$

$$y = A_2 \sin(\omega t + \varphi_0) = A_2 \sin \omega t \cos \varphi_0 + A_2 \cos \omega t \sin \varphi_0 =$$

$$= \frac{A_2}{A_1} x \cos \varphi_0 + A_2 \sqrt{1 - \frac{x^2}{A_1^2}} \sin \varphi_0$$

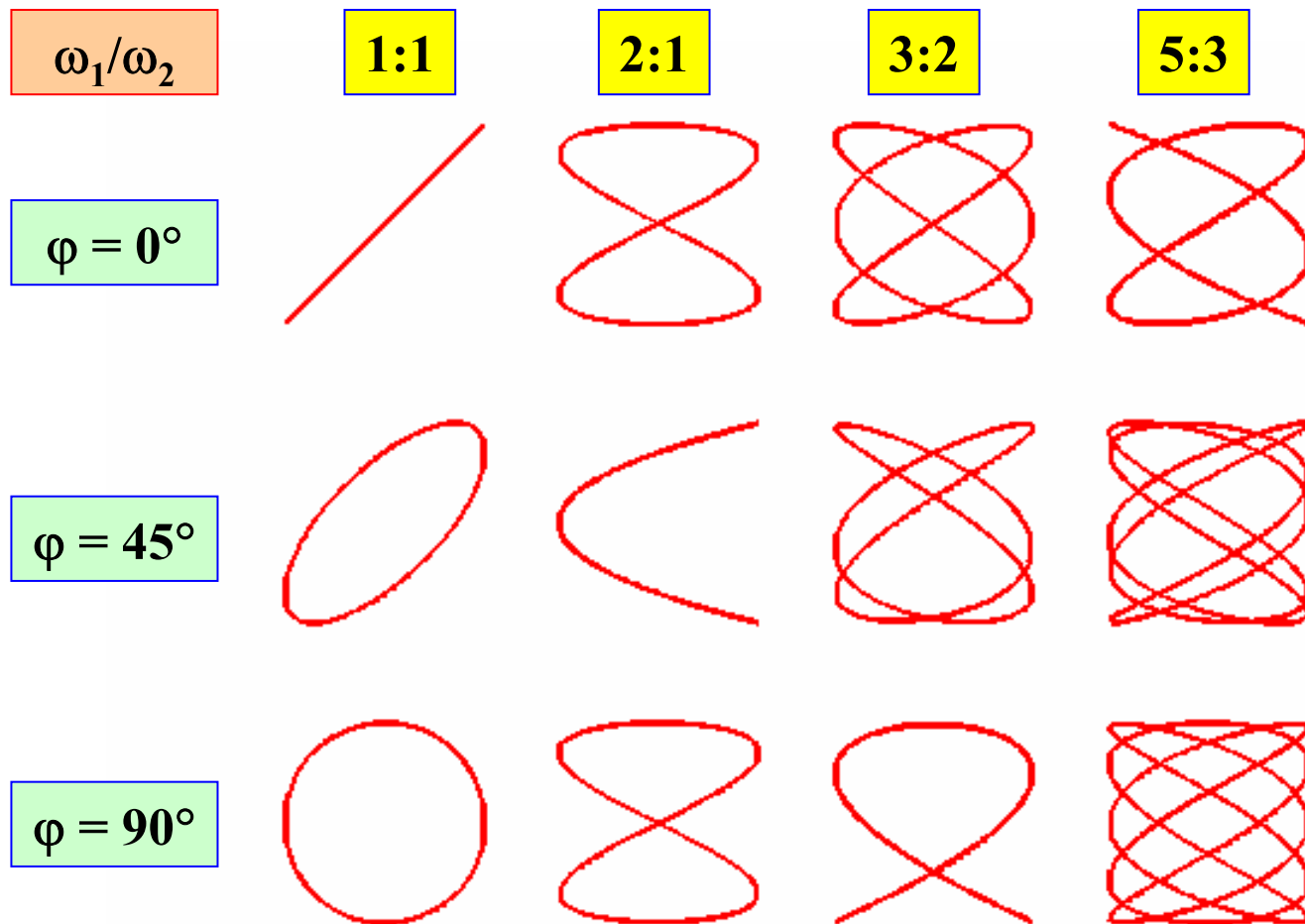


obecná rovnice elipsy

$$\frac{x^2}{A_1^2} - 2 \frac{xy}{A_1 A_2} \cos^2 \varphi_0 + \frac{y^2}{A_2^2} = \sin^2 \varphi_0$$

Skládání kmitání – 2D

⊕ Lissajousovy obrazce: $\omega_1 \neq \omega_2$ $\omega_1 / \omega_2 = n_2 / n_1$



Vázané oscilátory – 1D

na oscilátory působí nejen elastické síly F_{E1} a F_{E2} , ale i síla vazebná F_V

$$F_{Ei} = -ku_i$$

$$F_V = -K_V(u_2 - u_1)$$

pohybové rovnice oscilátorů

$$m \frac{d^2 u_i}{dt^2} = -ku_i \pm K_V(u_2 - u_1)$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

$$\omega_V^2 = \frac{k + 2K_V}{m}$$

součet řešení

$$\frac{d^2(u_1 + u_2)}{dt^2} + \omega_0^2(u_1 + u_2) = 0$$

$$u_1 + u_2 = A_1 \sin(\omega_0 t + \varphi_1)$$

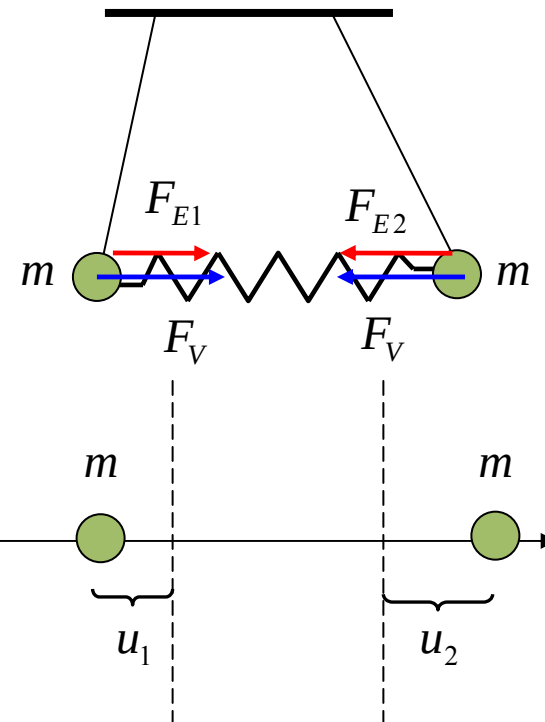
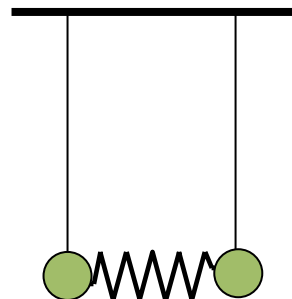
rozdíl řešení

$$\frac{d^2(u_2 - u_1)}{dt^2} + \omega_V^2(u_2 - u_1) = 0$$

$$u_2 - u_1 = A_2 \sin(\omega_V t + \varphi_2)$$

výsledné řešení

$$u_{1,2} = \frac{1}{2} [A_1 \sin(\omega_0 t + \varphi_1) \mp A_2 \sin(\omega_V t + \varphi_2)]$$

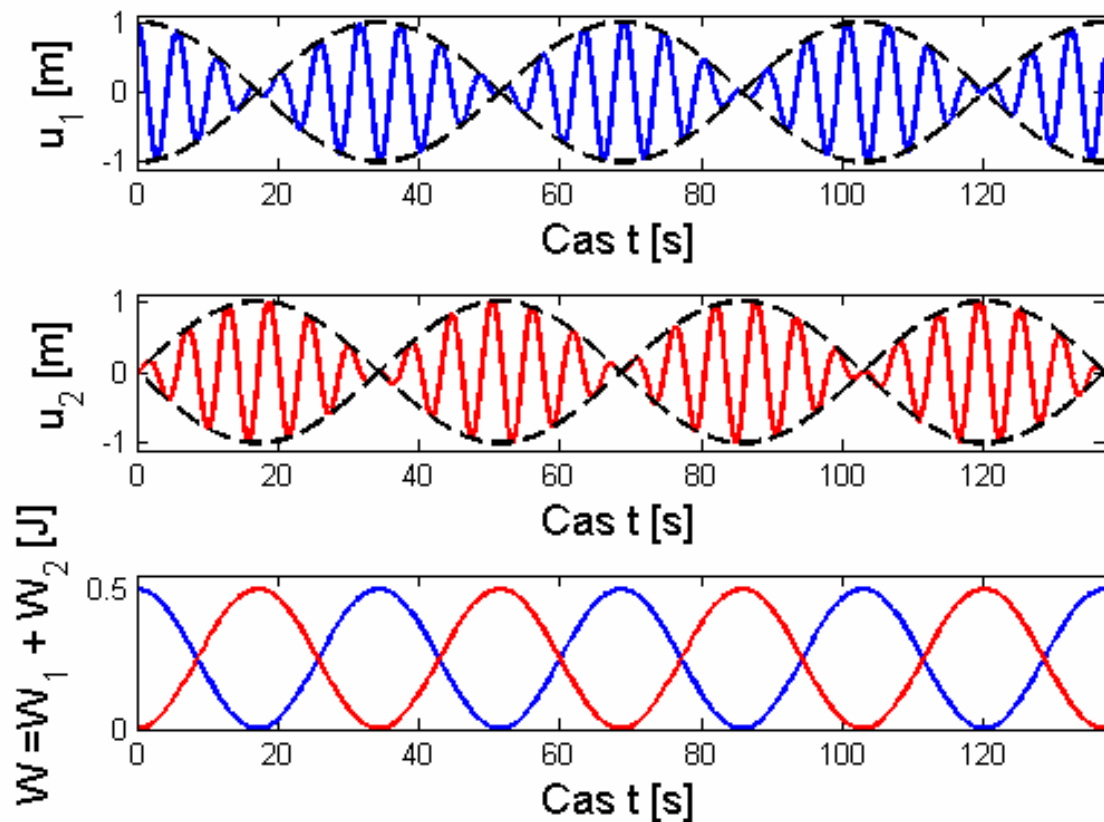


Vázané oscilátory – 1D

u spřažených oscilátorů
vlivem vazby dochází k
rázům

Čím těsnější je vazba mezi
oscilátory, tím rychleji se přenáší
mezi nimi mechanická energie

jako spřažené
oscilátory
můžeme
považovat vazby
mezi
jednotlivými
částicemi látek



Kmitavý pohyb - aplikace

Měření vibrací a zrychlení -
akcelerometry

vynucené kmitání

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + 2b \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = -a(t) = -\frac{d^2 x}{dt^2}$$

$$\frac{A_u}{A_x} = \frac{\Omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4b^2 \Omega^2}}$$

$$\frac{\Omega}{\omega_0} \ll 1$$



$$\frac{A_u}{A_x} \approx \frac{\Omega^2}{\omega_0^2}$$

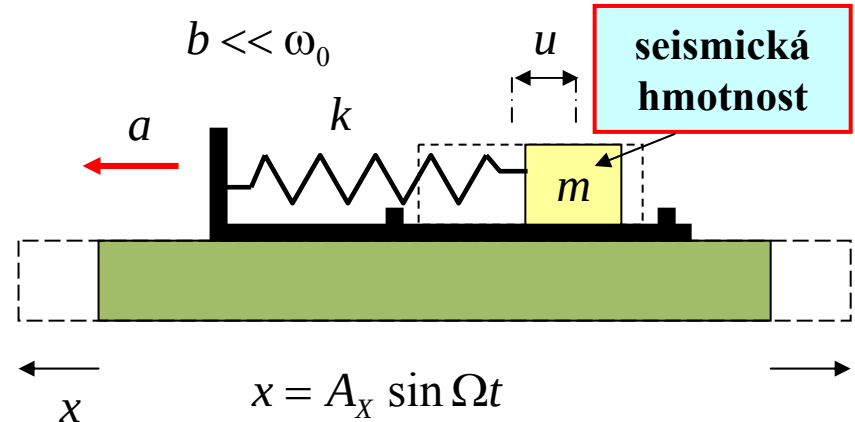
měření zrychlení

$$\frac{\Omega}{\omega_0} \gg 1$$



$$\frac{A_u}{A_x} \approx 1$$

měření posunutí

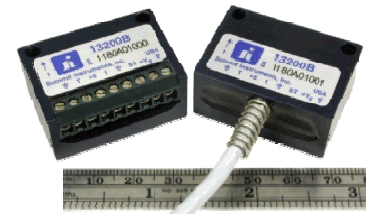


$$\omega_0 = \sqrt{k/m}$$

$$F = ku = ma$$

$$a_{\max} = A_x \Omega^2$$

musí se snímat
výchylka u



Kmitavý pohyb - aplikace

Senzor nárazu – air bag system



používá MEMS akcelerometry
pro detekci spuštění air bagu