Elektromagnetické pole

Maxwellovy rovnice

diferenciální tvar | **integrální tvar**

$$\mathrm{rot}\,\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \qquad \oint_C \vec{H}\,\mathrm{d}\vec{l} = \iint_S \left(\vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \mathrm{d}\vec{S}$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \Leftrightarrow \qquad \oint_C \vec{E}\,\mathrm{d}\vec{l} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \iint_S \vec{B}\,\mathrm{d}\vec{S}$$

$$\mathrm{div}\,\vec{D} = \rho \qquad \oiint_S \vec{D}\,\mathrm{d}\vec{S} = \iiint_V \rho\,\mathrm{d}V$$

$$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0 \qquad \oiint_S \vec{B}\,\mathrm{d}\vec{S} = 0$$

Materiálové rovnice

$$\vec{D} = \vec{D}(\vec{E}), \quad \vec{B} = \vec{B}(\vec{H}), \quad \vec{j} = \vec{j}(\vec{E})$$

$$\vec{D} = \varepsilon.\vec{E} \qquad \vec{B} = \mu.\vec{H} \qquad \vec{j} = \gamma.\vec{E}$$

Elektromagnetické pole

Lorentzova síla

$$\vec{F} = Q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right)$$

- síla působící na náboj, pohybující se v elektromagnetickém poli

Hraniční podmínky

- podmínky, které splňují vektory elektromagnetického pole na rozhraní mezi dvěma různými prostředími, kde se mění materiálové vlastnosti nespojitě

$$\begin{array}{ll}
H_{1t} - H_{2t} = J_S & \vec{n} \times (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) = \vec{J}_S \\
E_{1t} - E_{2t} = 0 & \vec{n} \times (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) = \vec{0} \\
B_{1n} - B_{2n} = 0 & \vec{n} \cdot (\vec{B}_1 - \vec{B}_2) = 0 \\
D_{1n} - D_{2n} = \rho_S & \vec{n} \cdot (\vec{D}_1 - \vec{D}_2) = \rho_S
\end{array}$$

Elektromagnetické pole

Energie elektromagnetického pole

$$\vec{E}\,\mathrm{rot}\,\vec{H} = \vec{j}\vec{E} + \vec{E}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \qquad \vec{H}\,\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\vec{H}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\mathrm{div}\left(\vec{E}\times\vec{H}\right) = \vec{H}\,\mathrm{rot}\,\vec{E} - \vec{E}\,\mathrm{rot}\,\vec{H} = -\vec{H}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{E}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} - \vec{j}\vec{E}$$

$$\int_V \mathrm{div}\left(\vec{E}\times\vec{H}\right)\mathrm{d}V = -\int_V\left(\vec{H}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{E}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)\mathrm{d}V - \int_V \vec{j}\vec{E}\,\mathrm{d}V$$

$$\oint_S\left(\vec{E}\times\vec{H}\right)\mathrm{d}\vec{S} = -\int_V\left(\vec{H}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{E}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right)\mathrm{d}V - \int_V \vec{j}\vec{E}\,\mathrm{d}V$$

$$\vec{E}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{E}\vec{D}\right),$$

$$\vec{H}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{H}\vec{B}\right)$$

$$\oint_S\left(\vec{E}\times\vec{H}\right)\mathrm{d}\vec{S} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_V \frac{1}{2}\left(\vec{H}\vec{B} + \vec{E}\vec{D}\right)\mathrm{d}V - \int_V \vec{j}\vec{E}\,\mathrm{d}V$$

Elektromagnetické pole

Poyntingův vektor

$$\vec{N} = \vec{E} \times \vec{H}$$

hustota elmag.energie

$$w = \frac{1}{2}\left(\vec{H}\vec{B} + \vec{E}\vec{D}\right)$$

$$\oint_S \vec{N}\,\mathrm{d}\vec{S} = -\frac{\partial}{\partial t}\int_V w\,\mathrm{d}V - \int_V \vec{j}\vec{E}\,\mathrm{d}V \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial W}{\partial t} = -\int_V \vec{j}\vec{E}\,\mathrm{d}V - \oint_S \vec{N}\,\mathrm{d}\vec{S}$$

zákon zachování energie

$$\int_V \vec{j}\vec{E}^{*}\mathrm{d}V = \frac{\partial}{\partial t}\int_V w\,\mathrm{d}V + \int_V \vec{j}\vec{E}\,\mathrm{d}V + \oint_S \vec{N}\,\mathrm{d}\vec{S}$$

výkon dodaný do objemu *V* vtištěnými silami se spotřebuje jednak na změnu energie elektromagnetického pole, jednak na Jouleovo teplo a také že část výkonu vyteče (vyzáří se) plochou *S* z objemu *V* do okolního prostoru

Elektromagnetické pole

Elektromagnetické vlny

- homogenní a izotropní prostředí bez nábojů a proudů $\rho = 0 \quad \vec{j} = \vec{0}$
- Maxwellovy rovnice

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad \operatorname{div} \vec{E} = 0$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \qquad \operatorname{div} \vec{H} = 0$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{H} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{H} - \nabla^2 \vec{H} = -\varepsilon\mu \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}$$

vlnová rovnice

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

$$\nabla^2 \vec{H} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}$$

rychlost šíření elmag.vln

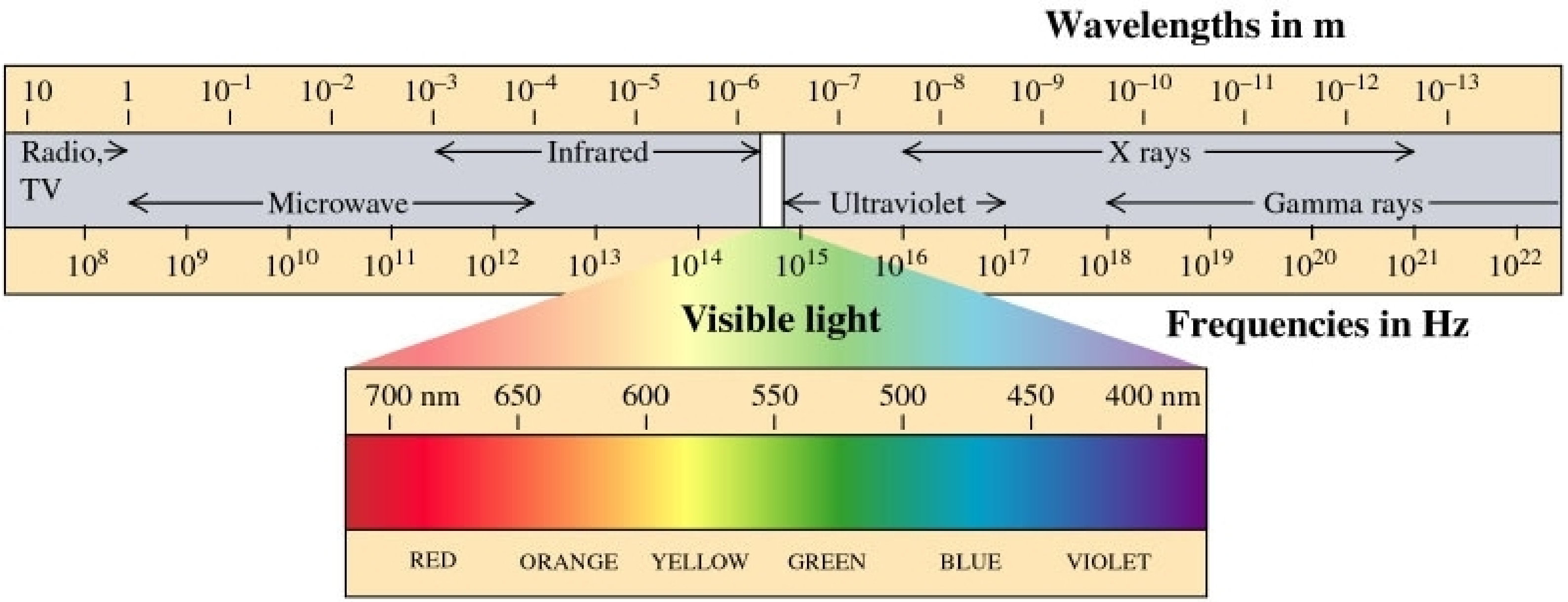
$$\varepsilon\mu = \frac{1}{v^2} \Rightarrow v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_o \varepsilon_r \mu_o \mu_r}}$$

Elektromagnetické pole

rychlost šíření elmag.vln ve vakuu

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_o \mu_o}} = 2{,}99792456 \cdot 10^8 \text{ m/s} \approx 3 \cdot 10^8 \text{m/s}$$

Elektromagnetické spektrum



Elektromagnetické pole

Harmonické elektromagnetické vlny

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_o(\vec{r})e^{-i\omega t}$$

$$\nabla^2 \vec{E}(\vec{r},t) = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 \vec{E}(\vec{r},t)}{\partial t^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\nabla^2 \vec{E}_o(\vec{r}) + k^2 \vec{E}_o(\vec{r}) = 0$$

Helmholzova rovnice

vlnové číslo

$$k = \frac{\omega}{v} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Elektromagnetické pole

Rovinná harmonická vlna

$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_o \exp\left[ik(\vec{n}\vec{r} - vt)\right] = \vec{E}_o \exp\left[i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)\right]$$

$$\vec{E}_o(\vec{r}) = \vec{E}_o \exp(ik\vec{n}\vec{r})$$

$$\varphi = k(\vec{n}\vec{r} - vt)$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}}, \quad \vec{k} = k\vec{n} = \frac{\omega}{v}\vec{n}$$

Maxwellovy rovnice

$$\mathrm{rot} \rightarrow i\vec{k} \times \vec{E}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow -i\omega$$

$$\omega\vec{D} = -(\vec{k} \times \vec{H})$$

$$\omega\vec{B} = (\vec{k} \times \vec{E})$$

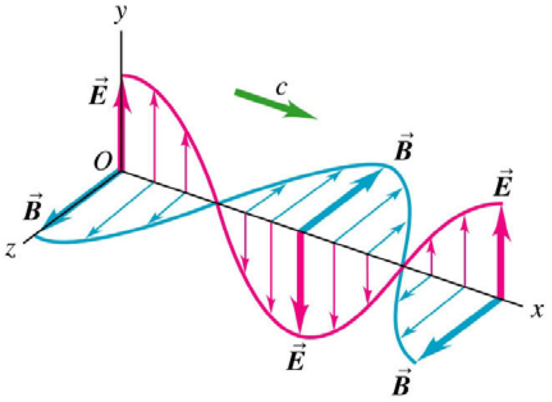
$$\vec{E} = -\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}(\vec{n} \times \vec{H})$$

$$\vec{H} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}(\vec{n} \times \vec{E})$$

Elektromagnetické pole

$$\vec{n}\vec{E} = 0,$$
$$\vec{n}\vec{H} = 0.$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\vec{E} \perp \vec{H}}$$



$$\vec{E}(\vec{r},t) = \vec{E}_o \cos\left[k(\vec{n}\vec{r} - vt + \delta)\right] = \vec{E}_o \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \alpha)$$

$$\vec{H}(\vec{r},t) = \vec{H}_o \cos\left[k(\vec{n}\vec{r} - vt + \delta)\right] = \vec{H}_o \cos(\vec{k}\vec{r} - \omega t + \alpha)$$

Elektromagnetické pole

Intenzita vlnění

Poyntingův vektor

$$\vec{N} = \vec{E} \times \vec{H} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}\vec{E}^2\vec{n} = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}|\vec{E}_o|^2\vec{n}\cos^2(k\,\vec{n}\vec{r} - \omega t + \alpha)$$

Intenzita vlny

$$I = \left|\langle\vec{N}\rangle\right| = \frac{1}{T}\int_0^T \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}|\vec{E}_o|^2\cos^2(k\vec{n}\vec{r} - \omega t + \alpha)\mathrm{d}t$$

$$\left|\langle\vec{N}\rangle\right| = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}|\vec{E}_o|^2\left\{1 + \frac{1}{2\omega T}\left[\sin 2(\omega T - k\vec{n}\vec{r} + \alpha) - \sin 2(-k\vec{n}\vec{r} + \alpha)\right]\right\}$$

$$\boxed{I = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}|\vec{E}_o|^2}$$

Elektromagnetické pole

Polarizace rovinné vlny

$$E_x = E_{ox}\cos(kz-\omega t+\delta_x),$$
$$E_y = E_{oy}\cos(kz-\omega t+\delta_y),$$
$$E_z = 0.$$

$\Longrightarrow$

eliptická polarizace

$$\left(\frac{E_x}{E_{ox}}\right)^2+\left(\frac{E_y}{E_{oy}}\right)^2-2\left(\frac{E_x}{E_{ox}}\right)\left(\frac{E_y}{E_{oy}}\right)\cos\delta=\sin^2\delta$$

$$\mathrm{tg}\,2\theta=\frac{2E_{ox}E_{oy}\cos\delta}{E_{ox}^2-E_{oy}^2}$$

Kruhová polarizace

$$E_{ox}=E_{oy}=E_o \Longrightarrow \delta=\pm(2m+1)\pi/2 \quad m=0,1,2,\ldots \Longrightarrow \left(\frac{E_x}{E_o}\right)^2+\left(\frac{E_y}{E_o}\right)^2=1$$

Lineární polarizace

$$E_{ox}=E_{oy}=E_o \Longrightarrow \delta=0 \quad \vee \quad \delta=\pm m\pi \quad m=0,1,2,\ldots \Longrightarrow \frac{E_x}{E_{ox}}=\pm\frac{E_y}{E_{oy}}$$

Elektromagnetické pole

Sférická harmonická vlna

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\nabla^2 U(r) + k^2 U(r) = 0$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\right)$$

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2 \frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}r}\right) + k^2 U = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 (rU)}{\mathrm{d}r^2} + k^2 (rU) = 0$$

$$U(r) = C_1 \frac{e^{ikr}}{r} + C_2 \frac{e^{-ikr}}{r}$$

řešení Helmholzovy rovnice

divergentní sférická vlna

$$V(r,t) = U(r) e^{-i\omega t}$$

řešení vlnové rovnice

$$V(r,t) = \frac{U_o}{r} \cos(kr - \omega t + \alpha)$$

$$V(r,t) = C_1 \frac{e^{i(kr-\omega t)}}{r} + C_2 \frac{e^{-i(kr+\omega t)}}{r}$$

Intenzita vlny

$$I = \frac{U_o^2}{r^2}$$