

Stacionární elektrické pole

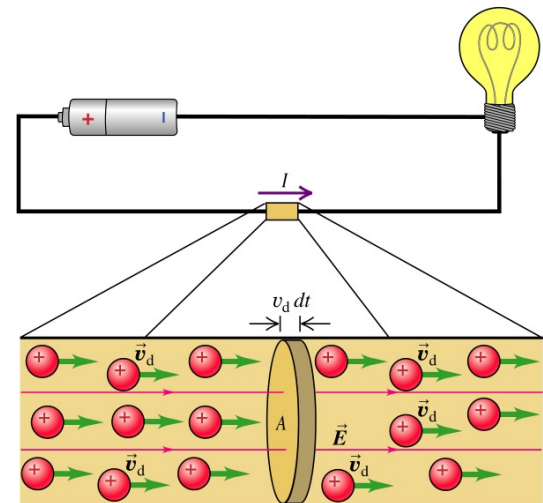
Stacionární elektrické pole

- ⊕ všechny veličiny pole jsou nezávislé (konstantní) na čase

Elektrický proud

$$I = \frac{dQ}{dt} \quad [\text{A}]$$

- ⊕ uspořádaný pohyb elektrických nábojů
- ⊕ velikost kladného náboje prošlého průřezem vodiče za jednotku doby
- pohyb elektrických nábojů musí být vyvolán vnějšími silami
- směr proudu – pohyb kladných nábojů



Stacionární elektrické pole

Vektor proudové hustoty

⊕ velikost proudu posuzujeme podle **proudové hustoty**

$$dI = \vec{j} d\vec{S}$$

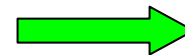
$$j = \frac{dI}{dS} = \frac{1}{dS} \left(\frac{dQ}{dt} \right)$$

$$dQ = \rho dV = \rho dS dl = \rho dS v_d dt$$

ρ ... **prostorová hustota náboje**

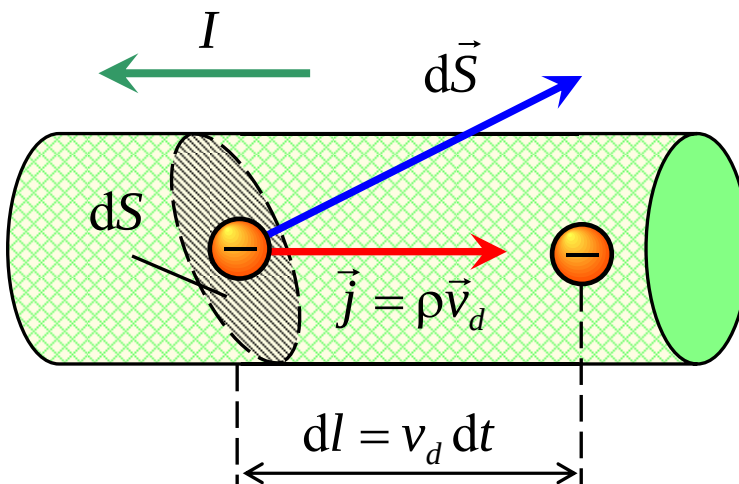
$$\rho = n_0 e$$

$$j = \frac{1}{dS} \left(\frac{\rho dS v_d dt}{dt} \right) = \rho \cdot v_d$$



$$\vec{j} = \rho \vec{v}_d = n_0 e \vec{v}_d$$

v_d ... **driftová rychlost**



Stacionární elektrické pole

⊕ **Příklad:** (driftová rychlost v měděném vodiči)

prostorová hustota
vodivostních elektronů

počet atomů
(iontů) v 1 m³

$$n_0 = n_V V \approx 9 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$$

$$n_V = \frac{\rho_{Cu}}{m_{Cu}} = \frac{\rho_{Cu}}{M_{Cu} u}$$

$$m_u \doteq 1,66 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

$$\rho_{Cu} = 8963 \text{ kg / m}^3$$

$$M_{Cu} = 63,54$$



driftová rychlost (Cu)

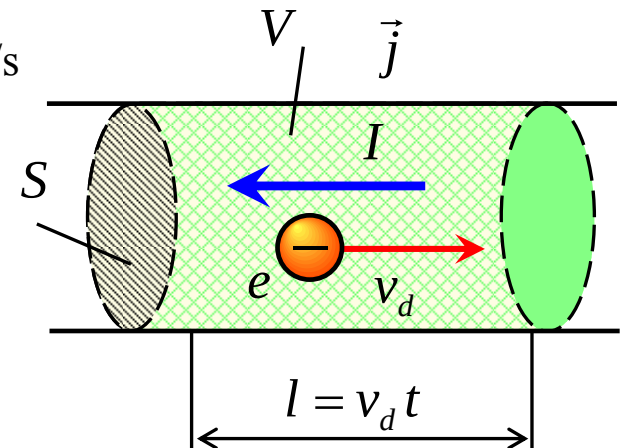
$$j_{\max} = \frac{I_{\max}}{S} \approx 10 \text{ A/mm}^2$$

$$v_d = \frac{I_{\max}}{S n_0 e} \approx 0,7 \text{ mm/s}$$



$$v \approx 10^6 \text{ m/s}$$

tepelný pohyb volných
elektronů

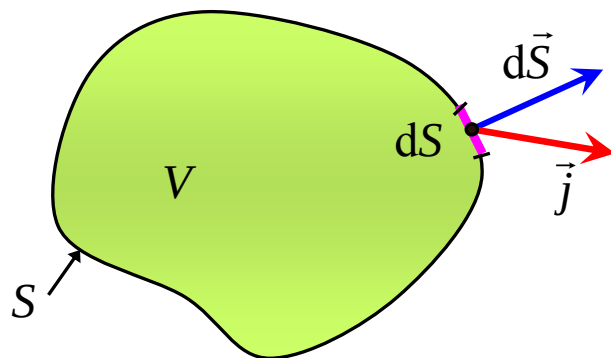


Stacionární elektrické pole

Zákon zachování náboje

$$I = \oint_S \vec{j} d\vec{S} = -\frac{dQ}{dt} = -\frac{d}{dt} \iiint_V \rho dV$$

$$\vec{j} = f(\vec{r}, t)$$



**proud, který z uzavřené plochy
vytéká, je roven úbytku náboje
uvnitř této plochy za jednotku času**

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{j} dV = -\frac{d}{dt} \iiint_V \rho dV$$

Rovnice kontinuity

$$\frac{d\rho}{dt} + \operatorname{div} \vec{j} = 0$$

Stacionární elektrické pole

I. Kirchhoffův zákon

$$\vec{j} = f(\vec{r})$$

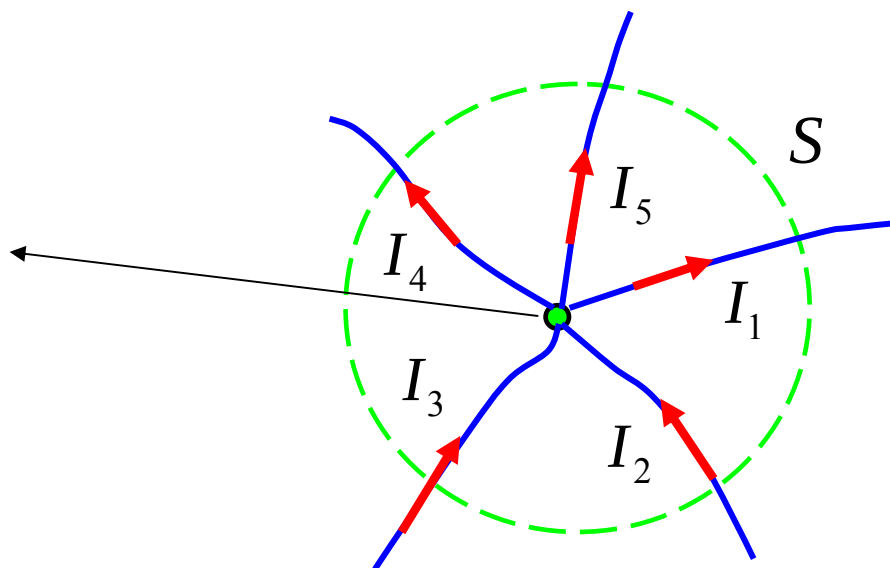
⊕ v případě stacionárního elektrického pole: $\frac{d\rho}{dt} = 0 \Rightarrow \operatorname{div} \vec{j} = 0$

$$\oiint_S \vec{j} d\vec{S} = \sum_{k=1}^n I_k = 0$$

algebraický součet
proudů, které do uzlu
přitékají, je roven nule



uzel – místo, kde se
setkávají dva nebo více
různých vodičů



Stacionární elektrické pole

Ohmův zákon

- ⊕ volné elektrony ve vodiči jsou urychlovány působením síly elektrického pole

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} = -e\vec{E} \quad \longrightarrow \quad \vec{v} = -\frac{e\vec{E}}{m}t + \vec{v}_0$$



střední rychlost elektronů

$$\bar{\vec{v}} = \frac{1}{2} \vec{v}_{\max} = -\frac{1}{2} \frac{e\vec{E}}{m} \bar{t}$$

$$\vec{j} = \rho \bar{\vec{v}} = -ne \left(-\frac{1}{2} \frac{e\vec{E}}{m} \bar{t} \right) = \left(\frac{1}{2} \frac{ne^2 \bar{t}}{m} \right) \vec{E} = \gamma \vec{E}$$

γ ... měrná elektrická
vodivost [$\Omega^{-1}\text{m}^{-1}$]

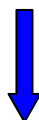
$$\vec{j} = \gamma \vec{E}$$

**Ohmův zákon v
diferenciálním tvaru**

Stacionární elektrické pole

Ohmův zákon pro homogenní vodič

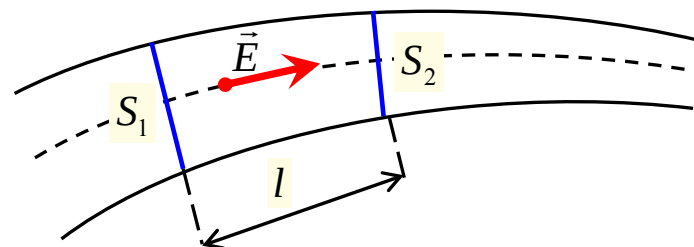
$$U = \int_1^2 \vec{E} d\vec{r} = \int_1^2 E dr = \int_0^l \frac{j}{\gamma} dr = \int_0^l \frac{I}{\gamma S} dr$$



$$I = \text{konst.} \quad \longrightarrow \quad R = \int_0^l \frac{dr}{\gamma S} \quad [\Omega]$$

$$U = R \cdot I$$

S_1, S_2 jsou ekvipotenciální plochy
a integraci provádíme po siločáře



elektrický odpor

**Ohmův zákon v
integrálním tvaru**

$\gamma = \text{konst.}$
 $S = \text{konst.}$



$$R = \frac{l}{\gamma \cdot S} = \rho \frac{l}{S}$$

$$\rho = \frac{1}{\gamma}$$

**měrný odpor
(rezistivita) ρ [Ωm]**

$$R = \frac{U^2}{P}$$

Stacionární elektrické pole

Měrný odpor pro různé materiály

Table 25.1 Resistivities at Room Temperature (20°C)

	Substance	$\rho (\Omega \cdot m)$	Substance	$\rho (\Omega \cdot m)$
<i>Conductors</i> Metals:	<i>Semiconductors</i>		Pure carbon (graphite)	3.5×10^{-5}
	Silver	1.47×10^{-8}	Pure germanium	0.60
	Copper	1.72×10^{-8}	Pure silicon	2300
	Gold	2.44×10^{-8}	<i>Insulators</i>	
	Aluminum	2.75×10^{-8}		
	Tungsten	5.25×10^{-8}		
	Steel	20×10^{-8}		
	Lead	22×10^{-8}		
	Mercury	95×10^{-8}		
	Alloys:			
	Manganin (Cu 84%, Mn 12%, Ni 4%)	44×10^{-8}		
	Constantan (Cu 60%, Ni 40%)	49×10^{-8}	Amber	5×10^{14}
	Nichrome	100×10^{-8}	Glass	10^{10} – 10^{14}
			Lucite	$>10^{13}$
			Mica	10^{11} – 10^{15}
			Quartz (fused)	75×10^{16}
			Sulfur	10^{15}
			Teflon	$>10^{13}$
			Wood	10^8 – 10^{11}

Copyright © 2004 Pearson Education, Inc., publishing as Addison Wesley.

Stacionární elektrické pole

Elektromotorické napětí

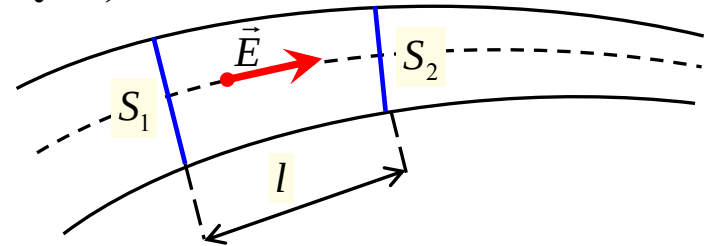
- ⊕ pro zajištění ustáleného elektrického proudu je nutné, aby na koncích vodiče bylo přiloženo stálé napětí
- ⊕ pohyb nositelů náboje v případě stacionárního proudu musí být zajištěno pomocí tzv. **vtištěných (elektromotorických) sil**

⊕ **vtištěné síly**

$$\vec{F}^* = e\vec{E}^*$$

⊕ **Ohmův zákon**

$$\vec{j} = \gamma(\vec{E} + \vec{E}^*)$$



integrujme podél proudové čáry mezi dvěma ekvipotenciálními plochami

$$\int_1^2 \frac{1}{\gamma} \vec{j} d\vec{r} = \int_1^2 \vec{E} d\vec{r} + \int_1^2 \vec{E}^* d\vec{r} \quad \Rightarrow \quad IR = U_{12} + \epsilon_{12}$$

Ohmův zákon pro nehomogenní vodič

elektromotorické napětí

Stacionární elektrické pole

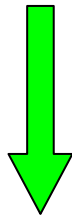
II. Kirchhoffův zákon

⊕ platí pro stacionární vedení proudu uzavřeným obvodem

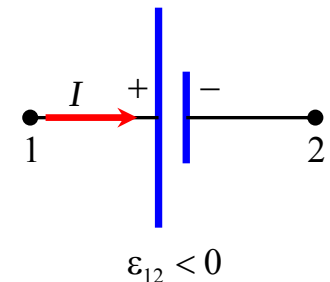
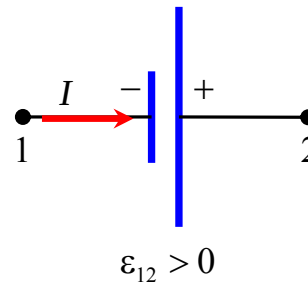
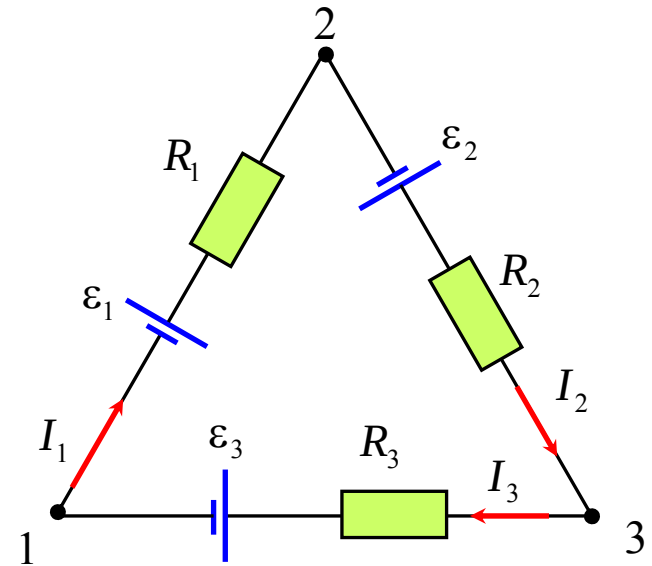
$$I_1 R_1 = \varphi_1 - \varphi_2 + \varepsilon_1$$

$$I_2 R_2 = \varphi_2 - \varphi_3 + \varepsilon_2$$

$$I_3 R_3 = \varphi_3 - \varphi_1 + \varepsilon_3$$



$$\sum_{i=1}^n R_i I_i = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i$$



V uzavřeném obvodu je součet součinů z odporů a proudů roven součtu elektromotorických napětí v jednotlivých větvích obvodu.

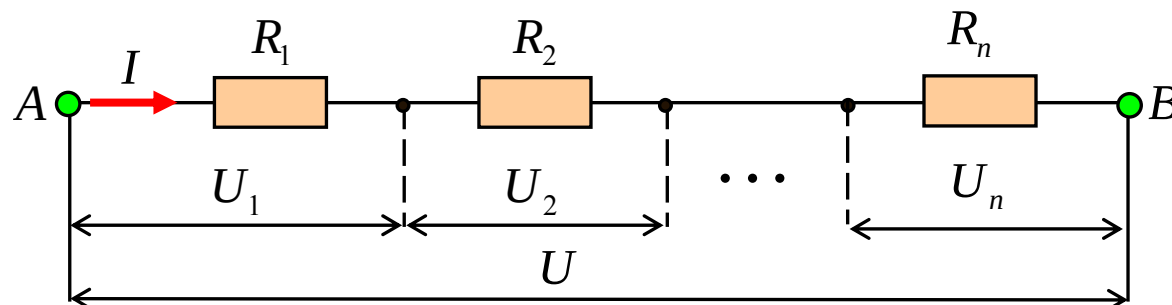
Stacionární elektrické pole

Sériové spojení vodičů

$$U = \sum_{i=1}^n U_i = \sum_{i=1}^n IR_i$$



$$R = \sum_{i=1}^n R_i$$

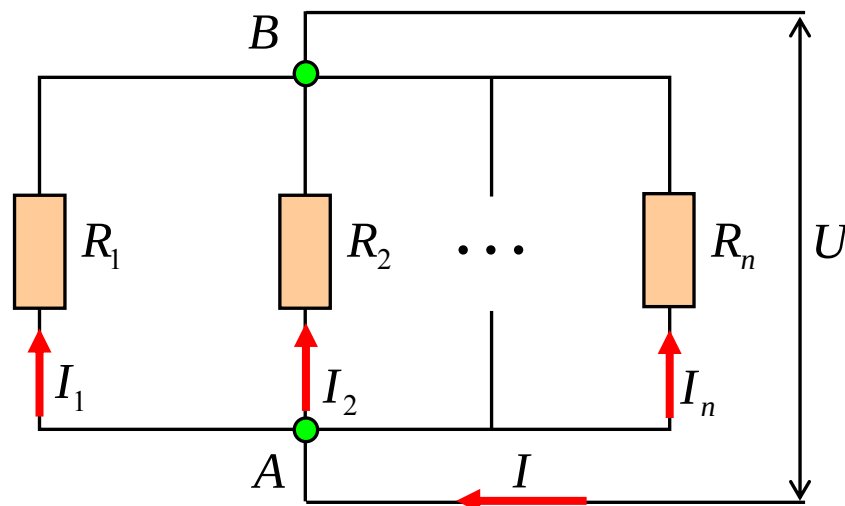


Paralelní spojení vodičů

$$I = \sum_{i=1}^n I_i = \sum_{i=1}^n \frac{U}{R_i} = U \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i} = \frac{U}{R}$$



$$\frac{1}{R} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}$$



Stacionární elektrické pole

Řešení složených elektrických ohmických obvodů

uzly

$$\sum_{i=1}^n I_i = 0$$

uzavřené obvody

$$\sum_{i=1}^n R_i I_i = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i$$



Kirchhoffovy zákony

Postup řešení složených obvodů

- ⊕ zvolíme libovolně směry proudů v jednotlivých částech složeného obvodu
- ⊕ pro K uzlů složeného obvodu napíšeme $(K - 1)$ nezávislých rovnic podle 1. Kirchhoffova zákona
- ⊕ napíšeme soustavu rovnic podle 2. Kirchhoffova zákona pro vybrané uzavřené obvody
- ⊕ směr obcházení uzavřených obvodů volíme libovolně
- ⊕ při výběru obvodů postupujeme tak, aby každý nový obvod obsahoval alespoň jednu část sítě, která není částí již dříve uvažovaných obvodů
- ⊕ vypočteme neznámé hodnoty proudu v jednotlivých částech obvodu

Stacionární elektrické pole

⊕ **Příklad:** (řešení obvodů)

I. Kirchhoffův zákon

$$I_1 = I_2 + I_G \quad I_4 = I_3 + I_G \quad I = I_1 + I_3$$

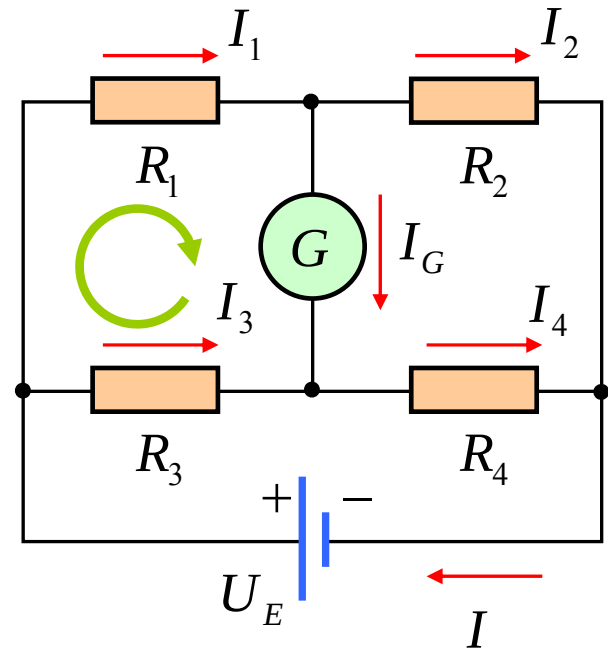
II. Kirchhoffův zákon

$$I_1 R_1 + I_2 R_2 = U_E$$

$$I_3 R_3 + I_4 R_4 = U_E$$

$$I_1 R_1 + I_G R_G + I_4 R_4 = U_E$$

v případě, že znaménko některého z vypočtených proudů vyjde záporné, znamená to, že skutečný směr proudu je právě opačný nežli jsme zvolili



$$I_1 R_1 + (I_1 - I_G) R_2 = U_E$$

$$(I_4 - I_G) R_3 + I_4 R_4 = U_E \quad \longrightarrow \quad I_G$$

$$I_1 R_1 + I_G R_G + I_4 R_4 = U_E$$

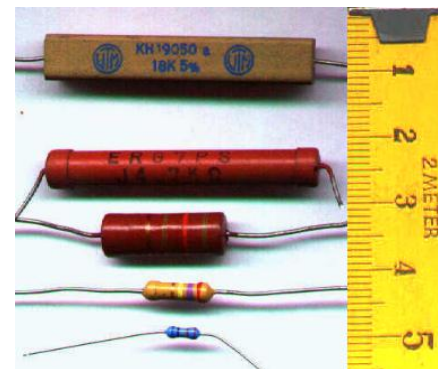
Stacionární elektrické pole

Elektrický odpor – závislost na teplotě

- ⊕ u kovů se vztah odporu na teplotě dá vyjádřit přibližně **lineární závislostí**
- ⊕ u kovů měrný odpor roste s teplotou, zatímco u polovodičů klesá

$$R = R_0 (1 + \alpha \Delta t)$$

Materiál	α [K ⁻¹]
stříbro	$4,1 \cdot 10^{-3}$
měď	$4,3 \cdot 10^{-3}$
hliník	$4,4 \cdot 10^{-3}$
konstantan	$0,03 \cdot 10^{-3}$
křemík	$-70 \cdot 10^{-3}$

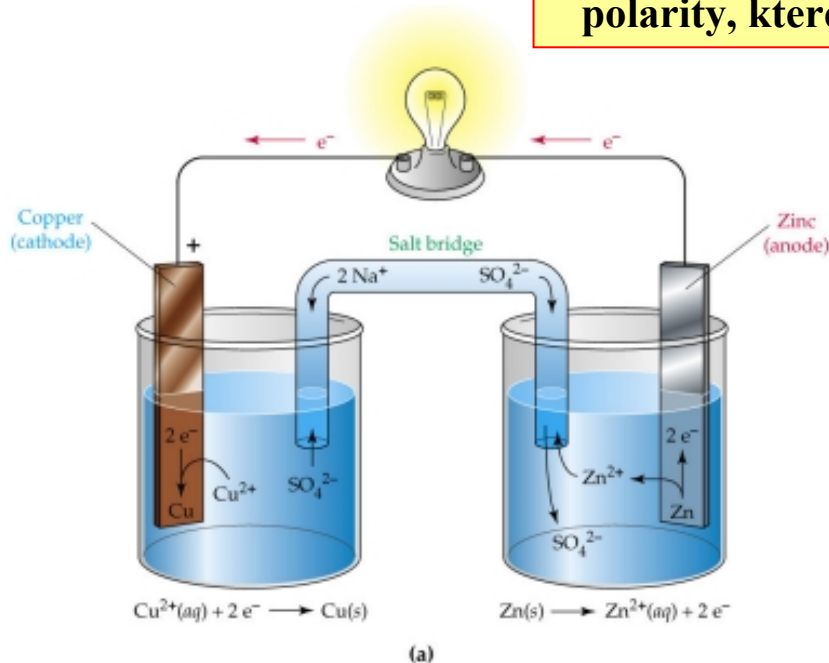


Stacionární elektrické pole

Elektrolyty -elektrolýza

- ⊕ látky, které vedou proud pomocí **makroskopického pohybu iontů**
- ⊕ elektrolyty mohou být **kapalné, pevné i plynné látky**
- ⊕ kapalné roztoky (H_2SO_4 , NaCl , CuSO_4 , NaOH ,...)

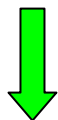
v roztocích dochází k disociaci (rozštěpení) molekul na ionty opačné polarity, které složí k vedení el.proudu



Stacionární elektrické pole

pH faktor

- ⊕ i chemicky čistá voda (H_2O) je slabě disociována (na kladné ionty H^+ a záporné ionty OH^-)
- ⊕ stupeň disociace molekul $\sim 1,7 \cdot 10^{-9}$
- ⊕ koncentrace iontů $\text{H}^+ \sim 10^{-7} \text{ kmol/m}^3$



$$\text{pH} = -\log[\text{H}^+]$$

$\text{pH} = 7 \dots$ neutrální látka

$\text{pH} < 7 \dots$ kyselá látka

$\text{pH} > 7 \dots$ zásaditá látka

Stacionární elektrické pole

1. Faradayův zákon elektrolýzy

- ⊕ množství látky vyloučené na elektrodě závisí přímo úměrně na množství prošlého náboje Q

$$m = AQ = AIt$$

A ... elektrochemický ekvivalent látky
 I ... elektrický proud
 t ... čas



2. Faradayův zákon elektrolýzy

- ⊕ k vyloučení 1 kilovalu jakékoliv látky je potřeba tzv. Faradayova náboje F_0

$$F_0 = 9,65222 \cdot 10^7 \text{ C}$$

$$A = \frac{m_i}{ve} = \frac{m_i N_A}{ve N_A} = \frac{M_m}{vF}$$

A ... elektrochemický ekvivalent látky
 F ... Faradayova konstanta
 v ... mocenství látky
 m_i ... hmotnost iontu
 M_m ... molární hmotnost látky

$$1 \text{ kval} = \frac{1 \text{ kmol}}{\text{mocenství}}$$

Stacionární elektrické pole

⊕ Příklad: (elektrolytické pokovování)

- určete přibližně, jaká vrstvička stříbra se vyloučí při elektrolytickém posříbření na elektrodě o ploše S , jestliže elektrolytem protéká proud I po dobu τ

stříbro:

$$\rho = 10500 \text{ kg/m}^3$$

$$A_r \doteq 107,9$$

$$F = 9,6485 \cdot 10^4 \text{ C/mol}$$

$$S = 100 \text{ cm}^2$$

$$I = 5 \text{ A}$$

$$\tau = 10 \text{ hod}$$



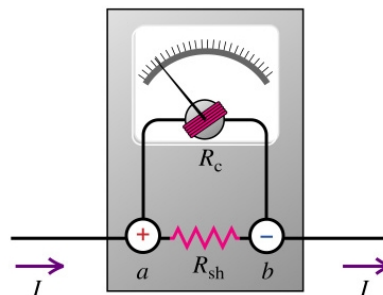
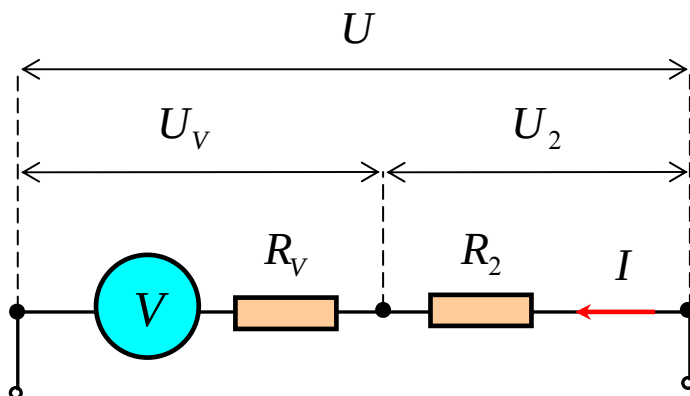
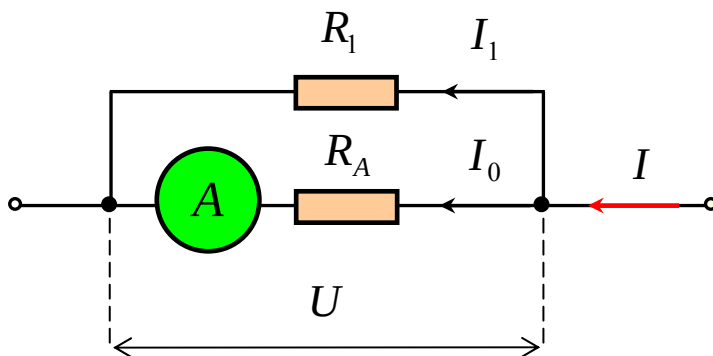
$$m = AIt = \frac{M_m}{\nu F} It = \frac{A_r \cdot 10^{-3}}{\nu F} It = 0,201 \text{ kg}$$



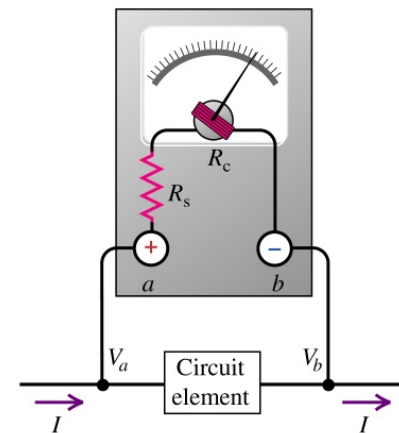
$$d = m / (S\rho) \doteq 1,92 \text{ mm}$$

Stacionární elektrické pole

Rozsah ampérmetru a voltmetru



(a)



(b)

$$U = R_A I_0$$

$$I = n I_0$$

$$I_1 = (n - 1) I_0$$

$$U = U_V + U_2 = n U_V$$

$$U_V = I R_V$$

$$U_2 = I R_2 = (n - 1) U_V$$

bočník

$$R_1 = \frac{U}{I_1} = \frac{R_A}{n - 1}$$

předřadný odpor

$$R_2 = (n - 1) R_V$$

Stacionární elektrické pole

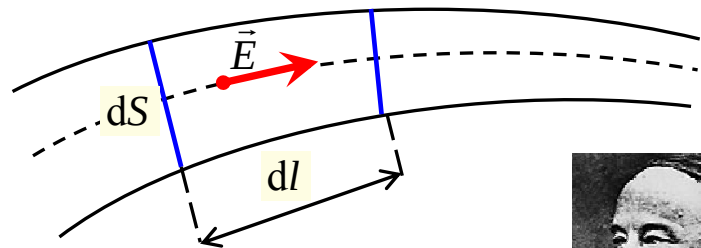
Jouleův zákon

$$dA = \vec{F} d\vec{r} = dQ \vec{E} d\vec{r} = \vec{j} d\vec{S} \vec{E} d\vec{r} dt$$



$$A = \int_0^t dt \cdot \iint_S \vec{j} d\vec{S} \cdot \int_K \vec{E} d\vec{r} = UI t$$

práce A , kterou vykonají elektrické síly se při srážkách volných elektronů s částicemi kovové mřížky transformuje na teplo



výkon el.proudu

$$P = \frac{dA}{dt}$$



$$P = I \cdot U = I^2 \cdot R = \frac{U^2}{R}$$

$$W = \int_0^t P dt = \int_0^t UI dt$$



energie dodaná elektrickým proudem za dobu t

$$U = \text{konst.}$$

$$I = \text{konst.}$$



$$W_Q = UI t = RI^2 t$$

teplo W_Q vyvinuté při průchodu elektrického proudu I vodičem s odporem R za dobu t

Stacionární elektrické pole

Využití Jouleova tepla pro ohřev, tepelné zdroje světla



$$W_Q = UIt = RI^2t$$

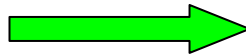


Stacionární elektrické pole

⊕ **Příklad:** (výpočet Jouleova tepla)

- určete, za jak dlouho se uvaří $m = 1$ kg vody o teplotě $t_0 = 20^\circ\text{C}$ s pomocí spirálového vaříče, jehož spirála má odpor $R = 20\ \Omega$, vaříč má tepelnou účinnost $\eta = 35\ \%$ a je připojen na napětí $U = 220\ \text{V}$.

$$\eta = \frac{Q}{P\tau} = \frac{mc\Delta t}{\tau U^2 / R}$$



$$\tau = \frac{Q}{P\tau} = \frac{mc\Delta t R}{\eta U^2} \approx 6\ \text{min}\ 36\ \text{s}$$



Stacionární elektrické pole

⊕ Příklad: (žárovka – odpor vlákna)

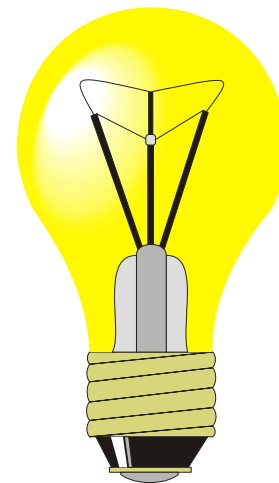
- určete, jak je velký nárazový proud I_0 v okamžiku rozsvícení 60 W žárovky (při teplotě $t_0 = 20^\circ\text{C}$), je-li teplotní součinitel odporu wolframového vlákna $\alpha = 0,0045 \text{ K}^{-1}$, žárovka je zapojena na síť 220 V a teplota rozžhaveného vlákna je $t_1 = 2500^\circ\text{C}$

$$I_1 = \frac{P}{U} = 0,27 \text{ A} \quad \longrightarrow \quad R_1 = \frac{U}{I_1} = \frac{U^2}{P} = 806,7 \, \Omega$$

$$R_1 = R_0 [1 + \alpha(t_1 - t_0)] \quad \longrightarrow \quad R_0 = \frac{R_1}{[1 + \alpha(t_1 - t_0)]} = 66,3 \, \Omega$$

nárazový proud

$$I_0 = \frac{U}{R_0} = 3,3 \text{ A}$$



Stacionární elektrické pole

Termoelektrické jevy

- ⊕ v určitých zvláštních případech lze uskutečnit přeměnu tepla na elektrický proud (*termoelektrické jevy*)
- ⊕ využívá teplotní závislosti kontaktního napětí mezi dvěma různými kovy (popř. kovu a polovodiče), které mají různou teplotu

Seebeckův jev

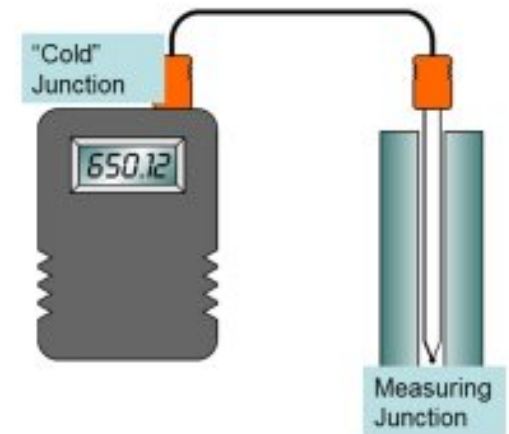
- ⊕ při nerovnoměrné teplotě na kontaktní ploše vzniká termoelektrické napětí (používá se např. při měření teploty)

Peltierův jev

- ⊕ inverzní jev k jevu Seebeckovu, kontakt se zahřívá resp. ochlazuje při průchodu elektrického proudu

Thomsonův jev

- ⊕ vznik termoelektrického napětí v objemu vodiče nebo polovodiče s teplotním spádem (mezi dvěma místy s různou teplotou)



Stacionární elektrické pole

Proudy volné

$$\vec{j} = \gamma \vec{E}$$

elektrický proud

- ⊕ **Proudy kondukční** - náboje se přemísťují v látkovém prostředí pod vlivem elektrického pole
- ⊕ **Proudy konvekční** - náboje se přemísťují ve vakuu jako proud nabitých částic nebo jsou vázány na makroskopická tělesa

náboje vykonávají
**makroskopický pohyb
v prostoru**

Proudy vázané

- ⊕ náboje vykonávají **mikroskopický, prostorově omezený pohyb** (např. polarizační proud v dielektriku)

Proud posuvný

- ⊕ není zprostředkován pohybem nábojů, ale proměnným elektromagnetickým polem

posuvný proud

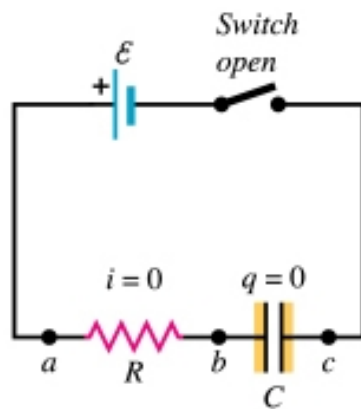
$$I_p = \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\iint_S \vec{D} d\vec{S} \right) \quad \longrightarrow \quad \vec{j}_p = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = \vec{j}_M + \vec{j}_{pol}$$

Celkový proud

$$\vec{j}_c = \vec{j} + \vec{j}_M + \vec{j}_{pol}$$

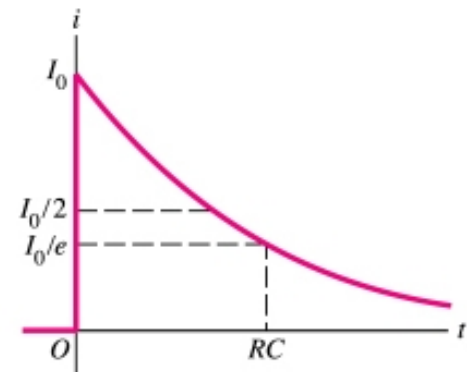
Stacionární elektrické pole

R-C obvod

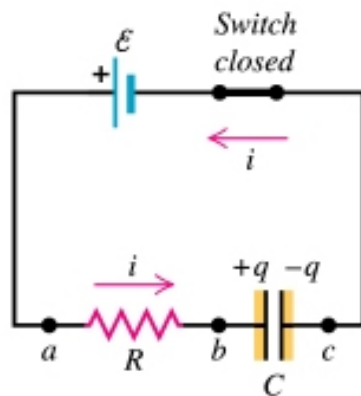


(a)

vybíjení
kondenzátoru

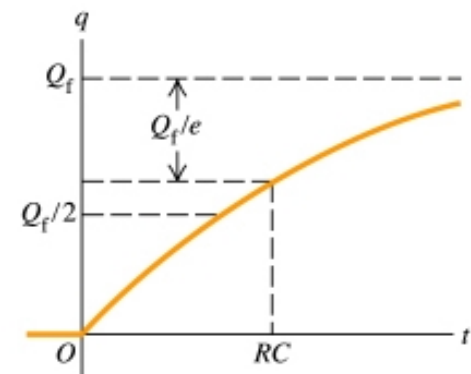


(a)



(b)

nabíjení
kondenzátoru



(b)

Stacionární elektrické pole

Vybíjení kondenzátoru

$$U_R + U_C = 0$$

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

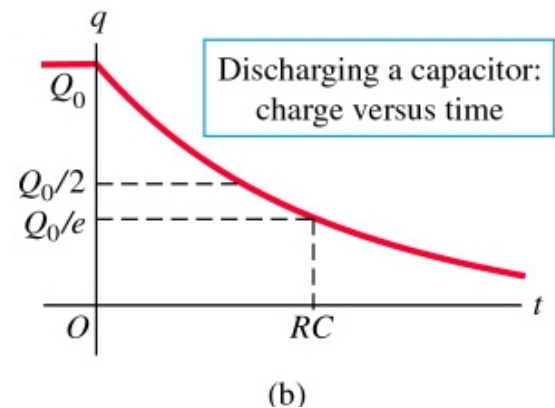
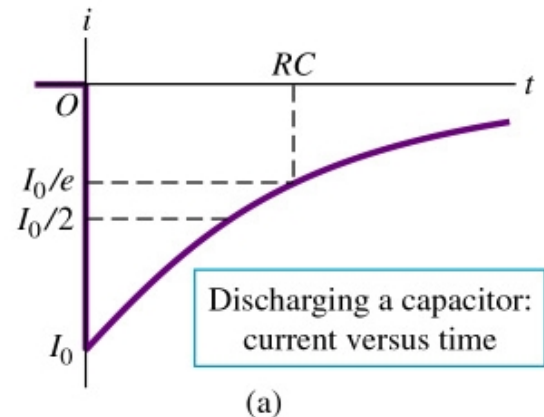


$$R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = 0$$



$$Q = Q_0 e^{-t/RC}$$

$$I = \frac{dQ}{dt} = -\left(\frac{Q_0}{RC}\right) e^{-t/RC}$$



Stacionární elektrické pole

Nabíjení kondenzátoru

$$U_R + U_C = \varepsilon \quad I = \frac{dQ}{dt}$$

$$RI + \frac{Q}{C} = \varepsilon$$



$$R \frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} = \varepsilon$$



$$Q = C\varepsilon(1 - e^{-t/RC})$$

$$I = \frac{dQ}{dt} = \frac{\varepsilon}{R} e^{-t/RC}$$

$$U_C = \varepsilon(1 - e^{-t/RC})$$