

Mechanika kontinua

⊕ model kontinua (model spojitého prostředí) :

- a) prostor je spojitý (souvislá množina M_G geometrických bodů B_G)
- b) každé těleso je spojité (můžeme je chápat jako souvislou množinu M_M materiálových bodů B_M)

Axiom continuity:

V každém okamžiku je každému bodu prostoru přiřazen materiálový bod

Diskrétní model



Spojité model

**vlastnosti látky na
poloze jsou vyjádřeny
diskrétními
hodnotami**

**vlastnosti látky na
poloze jsou
vyjádřeny spojitými
funkcemi**

Mechanika kontinua

⊕ **střední hustota materiálu** $\langle \rho \rangle$ v objemu ΔV

$$\langle \rho \rangle = \frac{\Delta M}{\Delta V}$$

- pro limitní případ, kdy ΔV splývá s bodem (prostoru nebo materiálu), získáme hustotu materiálu ve formě spojitě funkce souřadnic, tj.

hustota

$$\rho = \lim_{\Delta V \rightarrow B} \frac{\Delta M}{\Delta V}$$



**přechod od objemu
konečných rozměrů k
bezrozměrnému bodu**

Makroskopický popis
(pevných látek, kapalin
a plynů)

hmotnost

$$M = \int_{\Delta M} dM = \int_{\Delta V} \rho dV$$



V praxi se touto hodnotou rozumí **střední hodnota ve velice malém** (tzv. **elementárním**) objemu, kde se již neprojevuje nespojitá struktura skutečné látky

Mechanika kontinua

- Obdobným způsobem jako hmotnost můžeme pro spojitá tělesa vyjádřit všechny charakteristiky soustavy hmotných bodů, závislé na hmotnosti (např. hybnost, moment hybnosti, moment setrvačnosti,...)

hybnost

$$\vec{p} = \int \vec{v} dm$$

moment hybnosti

$$\vec{L} = \int [\vec{r} \times \vec{v}] dm$$

2 typy veličin:

- ⊕ **I. Veličiny intenzivní** - jsou to veličiny, které **závisí na poloze** (např. teplota, rychlost, tlak, moment setrvačnosti,...).
- ⊕ **II. Veličiny extenzivní** - jsou to veličiny, které **charakterizují celé těleso jedinou číselnou hodnotou** (na poloze nezávisící), např. objem, energie, hmotnost.

Popis kontinua

spojitý prostor



spojitý materiál

2 typy přístupů:

dvě odlišné
referenční soustavy

- I. Eulerova metoda

V prostoru si vybereme **jeden pevný bod** B_G a sledujeme vlastnosti (např. rychlost, zrychlení, teplotu, tlak) **různých materiálových bodů** B_M v **daném bodě prostoru** v různých časových okamžicích. (látka se pohybuje prostorem a deformuje se).

$$\vec{r} = (x_1, x_2, x_3) \quad x_i = x_i(X_j, t) \quad i = 1, 2, 3$$

Eulerovy souřadnice

- II. Lagrangeova metoda

Vybereme si **jeden materiálový bod** B_M a sledujeme jeho pohyb v **čase** (změny polohy, trajektorii, rychlost, zrychlení) a **změny jeho vlastností** (např. změny teploty, tlaku,...).

$$\vec{R} = (X_1, X_2, X_3) \quad X_j = X_j(x_i, t) \quad j = 1, 2, 3$$

Lagrangeovy souřadnice

Popis kontinua

- ⊕ při popisu změny nějaké skalární funkce f kontinua (např. teploty) máme:

$$f = f(x_i, t) = f(x_i(X_j, t), t)$$

- změnu funkce f můžeme vyjádřit jako:

$$\frac{df}{dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\bar{R}} = \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{\bar{r}} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x_k} \left(\frac{\partial x_k}{\partial t} \right)_{\bar{R}} = \frac{\partial f}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \text{grad } f)$$

$\frac{dx_k}{dt} = v_k$

způsobeno pohybem látky

materiálová (Lagrangeova) časová derivace

lokální (Eulerova) časová derivace

konvektivní časová změna

Popis kontinua

⊕ **Rychlost** materiálového bodu:

$$\vec{v} = \left(\frac{\partial \vec{r}}{\partial t} \right)_{\vec{R}} = (v_1, v_2, v_3)$$

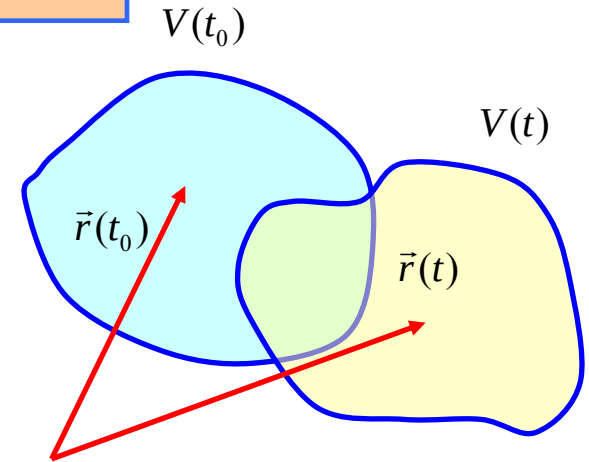
⊕ **Zrychlení** materiálového bodu :

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \equiv \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right)_{\vec{R}} = \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} \right)_{\vec{r}} + (\vec{v} \cdot \text{grad}) \vec{v}$$

část
lokální

část
konvektivní

$$a_i = \frac{\partial v_i}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad } v_i$$

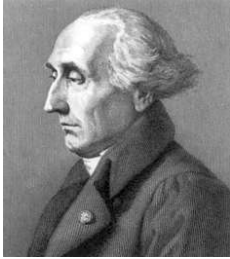


soubor částic látky
zaujímá v čase
různý objem a tvar

Kontinuum má dvě základní kinematické vlastnosti:

- a) může **pohybovat**
- b) může se **deformovat** (tj. měnit tvar a objem).

Kinematika spojitého prostředí



Znázornění pohybu kontinua:

Lagrangeova metoda



Eulerova metoda



$$\vec{r} = \vec{r}(\vec{R}, t) \quad \vec{R} = \vec{r}(t_0)$$

$$\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}, t)$$

- vyloučením času získáme **trajektorii** částic spojitého prostředí
- pohyb kontinua je pak popsán množinou všech trajektorií.



Proudočára a trajektorie
obecně nesplývají (pouze u
stacionárního proudění)

- zadané pole rychlosti v prostoru
- v čase $t = konst.$ můžeme v tekutině vést myšlené křivky - **proudnice** (proudočáry)
- rychlosti materiálových bodů ležících na proudnici v místech x_k v čase $t = konst.$ mají směry tečen k této křivce.



Charakteristiky vektorových polí

⊕ Proudočáry mohou vznikat i zanikat. O jejich přírůstku nebo úbytku nás informuje **divergence rychlosti**.

⊕ **Divergence** – výtok vektoru z objemového elementu jednotkové velikosti

• **Tok vektoru uzavřenou plochou:**

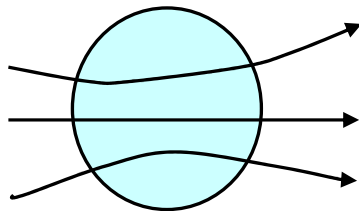
$$N = \oint_{\Delta\Omega} \vec{v} \, d\vec{\Omega}$$

tok můžeme charakterizovat počtem proudočar

$N > 0$... vytéká více než vtéká (zřídla toku)

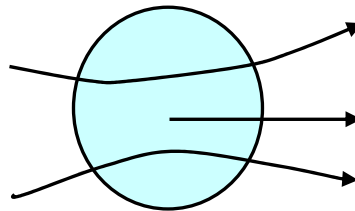
$N < 0$... vytéká méně než vtéká (propady toku)

$N = 0$... stejný vtok i výtok



$$\text{div } \vec{v} = 0$$

proudění nezřídlové



$$\text{div } \vec{v} \neq 0$$

$$\text{div } \vec{v} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oint_{\Delta\Omega} \vec{v} \, d\vec{\Omega} = \frac{dN}{dV}$$

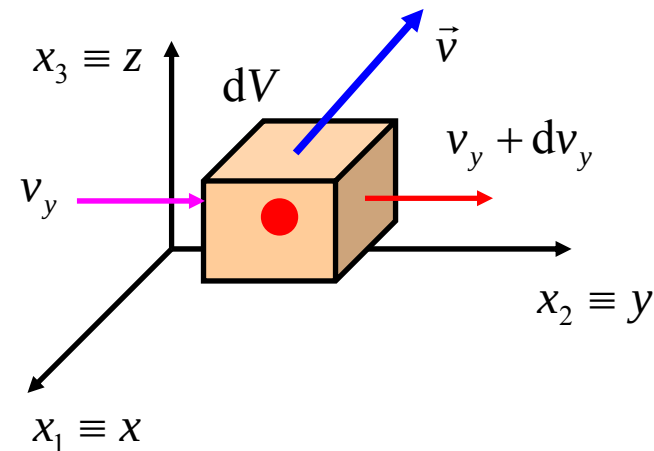
Divergence vyjadřuje to, zda dané vektorové pole (např. pole rychlosti proudící kapaliny, elektromagnetické pole,...) obsahuje v daném místě zdroje či úbytky toku dané veličiny

Umožňuje určit tok daného vektorového pole ve specifikovaném objemu, např. hmotnostní průtok kapaliny

Charakteristiky vektorových polí

⊕ Tok vektoru ve směru y:

$$dN_y = dv_y \cdot d\Omega_y = \frac{\partial v_y}{\partial y} dy dx dz = \frac{\partial v_y}{\partial y} dV$$



⊕ Celkový tok vektoru v objemu dV:

$$dN = dN_x + dN_y + dN_z = \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) dV = \text{div } \vec{v} dV$$

Gaussova věta:

⊕ Divergence vektorového pole:

$$\text{div } \vec{v} = (\nabla \cdot \vec{v}) = \left(\frac{d}{d\vec{r}} \cdot \vec{v} \right) = \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right)$$

$$\oint_{\Omega} (\vec{v} \cdot d\vec{\Omega}) = \int_V \text{div } \vec{v} dV$$

$$\oint_{\Omega} S d\vec{\Omega} = \int_V \text{grad } S dV$$

- výsledkem této diferenciální operace je **skalár (číslo)**

Charakteristiky vektorových polí

- ⊕ Jestliže některé proudočáry jsou uzavřené křivky, pak jde o tzv. **vírový pohyb**.

- ⊕ Vírový pohyb je možno charakterizovat **rotací rychlosti**:

$$\text{rot } \vec{v} = [\nabla \times \vec{v}] = \left[\frac{d}{d\vec{r}} \times \vec{v} \right]$$



$$\text{rot } \vec{v} = \text{rot } \vec{v}_T + \text{rot} [\vec{\omega} \times \vec{r}] = \text{rot} [\vec{\omega} \times \vec{r}] = 2\vec{\omega}$$

**Rotace rychlosti
jednoho bodu kontinua**

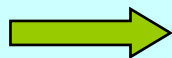
$$\text{rot } \vec{v}_T = \text{rot} \frac{d\vec{r}_T}{dt} = \frac{d}{dt} (\text{rot } \vec{r}_T) = 0$$

Stokesova věta:

$$\oint_{\Omega} \text{rot } \vec{V} d\vec{\Omega} = \int_{\Gamma} \vec{V} d\vec{r}$$

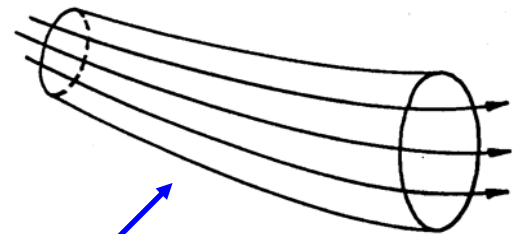


$$\text{rot } \vec{v} = \vec{0}$$



$$\vec{\omega} = \vec{0}$$

proudová trubice



Deformace kontinua

⊕ spojité prostředí může konat **translaci, rotaci** a **může se deformovat**

⊕ **vektor posunutí** - rozdíl polohových vektorů před a po deformaci

$$\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$$

$$\vec{u}(P) = \vec{r}'(P) - \vec{r}(P)$$

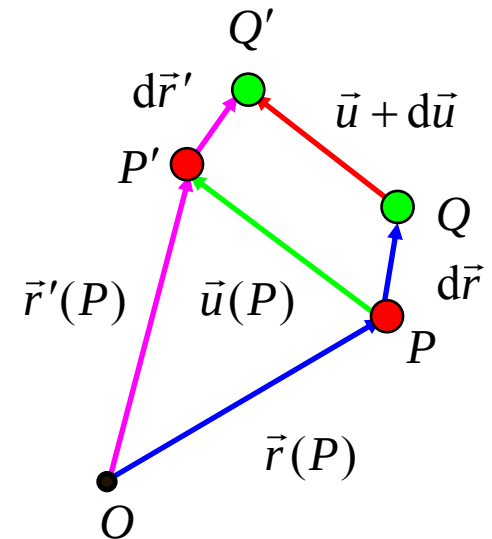
$$\vec{r}(Q) = \vec{r}(P) + d\vec{r} \quad \Rightarrow \quad \vec{u}(Q) = \vec{u}(P) + d\vec{u}$$

• poloha bodu Q po deformaci:

$$\vec{r}'(Q) = \vec{r}'(P) + d\vec{r}'$$

**deformace
kontinua**

$$d\vec{r}' = d\vec{r} + d\vec{u} = d\vec{r} + \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial u_1}{\partial x_j} dx_j, \sum_{j=1}^3 \frac{\partial u_2}{\partial x_j} dx_j, \sum_{j=1}^3 \frac{\partial u_3}{\partial x_j} dx_j \right)$$



Deformace kontinua

- ⊕ míra deformace materiálu je určena rozdílem:

$$(d\vec{r}')^2 - (d\vec{r})^2 = 2 \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \varepsilon_{ij} dx_i dx_j$$



$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right)$$

tenzor konečných deformací

- za předpokladu, že deformace jsou malé, tj.

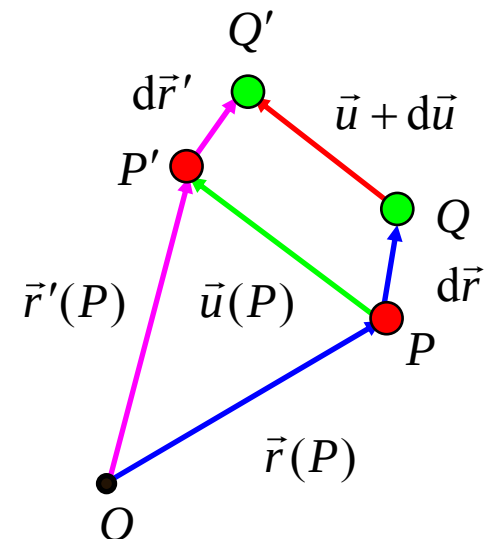
$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \ll 1$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

tenzor (malé) deformace

- symetrický tenzor 2.řádu

$$\vec{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}$$

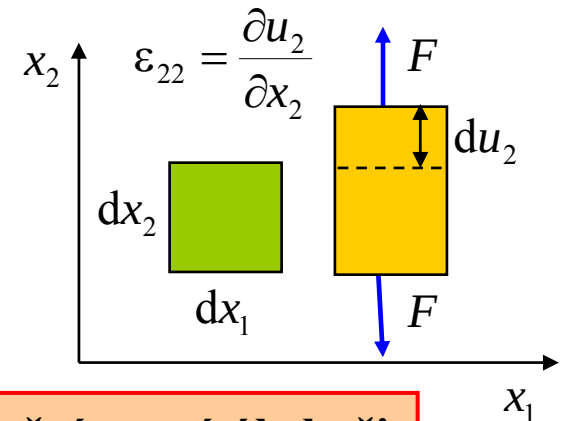


Deformace kontinua

$$\varepsilon_{ii} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}$$

relativní délková změna objemového elementu ve směru osy x_i

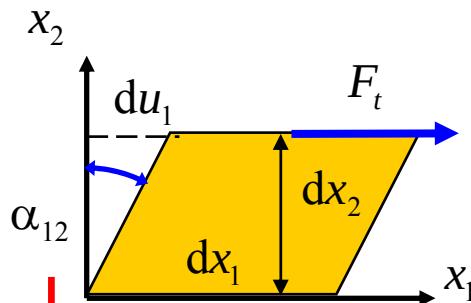
- souvisí se změnou objemu



$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

polovina úhlu, o který se změní pravý úhel při smykové deformaci obj.elementu se stranami rovnoběžnými s osami x_i a x_j

- souvisí se změnou tvaru (bez změny objemu)

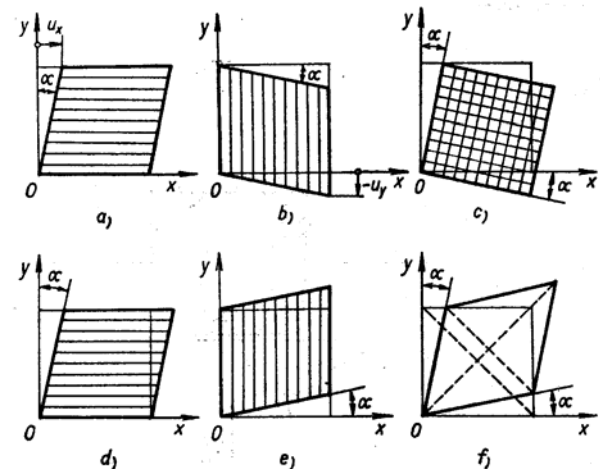


čistá rotace elementu

$$\alpha_{12} = -\alpha_{21}$$

$$\alpha_{12} \approx \tan \alpha_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = 2\varepsilon_{12}$$

úhel smyku
(poměrné posunutí)



Síly a napětí v kontinuu

Síly působící na tělesa můžeme dělit podle dvou hledisek:

A. Síly vnitřní a vnější (pouze vnější síly mění pohybový stav tělesa)

B. Síly krátkého a dlouhého dosahu

**Síly dlouhého dosahu
(síly objemové)**



**Síly krátkého dosahu
(síly povrchové)**

působí bezprostředně na velké vzdálenosti (např. gravitační síla)

působí na celý objem (a nikoli pouze na jeho povrch)
vyšetřovaného objektu

působí nezávisle na silách,
působících na sousední elementy

působí pouze mezi nejbližšími molekulami (molekulární síly).

vnější síla působí pouze na molekuly tvořící povrch
zkoumaného tělesa (**povrchové síly**) - **např. tlak, tření** atd.

účinek povrchových sil ovšem
nekončí na povrchu tělesa

Objemové síly

Objemové síly:

- můžeme zobrazit vektorovou funkcí: $\vec{F}_O(\vec{r}, t)$
- objemové síly charakterizujeme **intenzitou síly** a **hustotou síly**:

intenzita síly

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \lim_{\Delta M \rightarrow 0} \frac{\vec{F}_O(\vec{r}, t)}{\Delta M} = \frac{d\vec{F}_O}{dm}$$

$$\vec{F}_O(\vec{r}, t) = \int_{\Delta V} \rho \vec{E} dV = \int_{\Delta M} \vec{E} dm$$

síla působící na
jednotkovou
hmotnost dm tělesa

hustota síly

$$\vec{f}_O(\vec{r}, t) = \lim_{\Delta V \rightarrow B} \frac{\vec{F}_O(\vec{r}, t)}{\Delta V} = \frac{d\vec{F}_O}{dV}$$

$$\vec{F}_O(\vec{r}, t) = \int_{\Delta V} \vec{f}_O(\vec{r}, t) dV$$

síla působící na
jednotkový objem
 dV materiálu

$$\vec{f}_O = \rho \vec{E}$$

Povrchové síly

⊕ Povrchové síly:

- povrchovou sílu můžeme zobrazit vektorovou funkcí: $\vec{F}_P(\vec{r}, t)$
- při působení vnější povrchové síly na těleso vzniká odezva materiálu (reakční síla) – **vnitřní povrchová síla se šíří uvnitř materiálu** a snaží se vrátit materiál do původního stavu
- povrchové síly charakterizujeme **vektorem napětí** a **hustotou síly**:

**plošná hustota povrchové síly
(vektor napětí) T**

$$\vec{T} = \lim_{\Delta\Omega \rightarrow A} \frac{\vec{F}_P}{\Delta\Omega} = \frac{d\vec{F}_P}{d\Omega}$$

$$\vec{F}_P = \int_{\Omega} \vec{T} d\Omega$$

síla působící na
jednotkovou plochu
 $d\Omega$ povrchu

Napětí ... 1 N/m²=1 Pa

**objemová hustota vnitřní
povrchové síly f_P**

$$\vec{f}_P = \lim_{\Delta V \rightarrow B} \frac{\vec{F}_P}{\Delta V} = \frac{d\vec{F}_P}{dV}$$

$$\vec{F}_P = \int_{\Delta V} \vec{f}_P dV$$

síla působící na
jednotkový objem
 dV materiálu

Povrchové síly, napětí

- ⊕ Vektor napětí $\vec{T}$ můžeme obecně rozložit na normálovou a tečnou složku k dané elementární plošce $d\Omega$

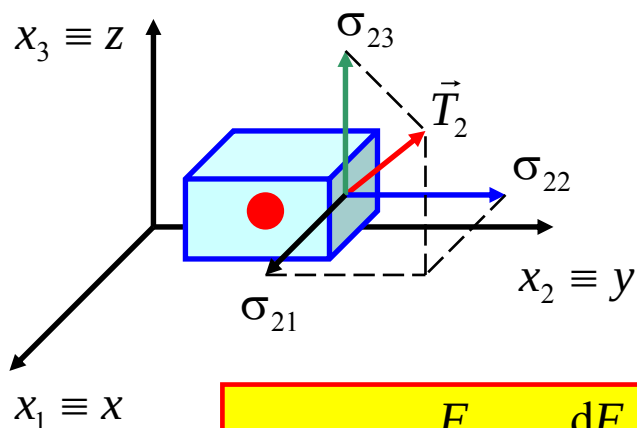
$$d\vec{F}_p = \vec{T} d\Omega$$

normálové
napětí

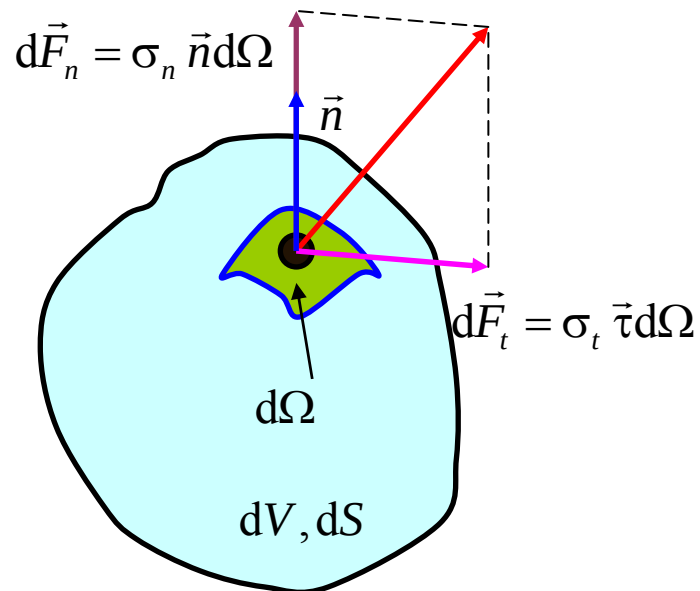


tečné (smykové)
napětí

- ⊕ Vektor napětí můžeme vyjádřit pomocí tzv. **tenzoru napětí**



$$\sigma_{ij} = \lim_{\Delta\Omega_i \rightarrow 0} \frac{F_{P,j}}{\Delta\Omega_i} = \frac{dF_{P,j}}{d\Omega_i}$$



vnitřní napětí

σ_{ij} – složka síly ve směru x_j působící na plošku $d\Omega_i$ kolmou k souřadné ose x_i

Povrchové síly, napětí

⊕ Tenzor napětí:

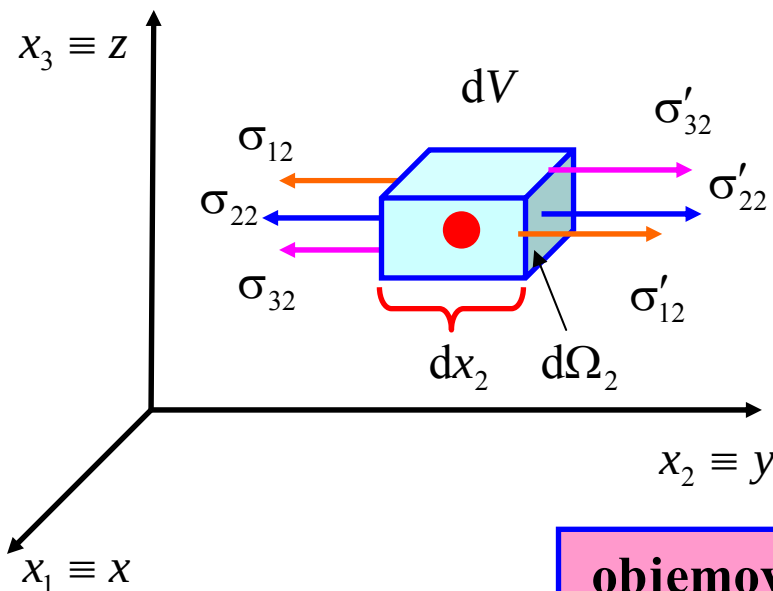
- symetrický tenzor 2.řádu, kde na hlavní diagonále jsou **normálová napětí** a na vedlejších diagonálách **tečná napětí**
- **popisuje stav napjatosti** v daném bodě tělesa (v různých bodech tělesa je různý)
- **vektor napětí na libovolné plošce:**

$$\vec{T} = \vec{\sigma} \vec{n}$$

$$T_i = \sum_{j=1}^3 \sigma_{ji} n_j$$

$$\vec{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$$

Rozdíl sil působících ve směru x_i na objemový element dV



$$dF_{P,i} = \sum_{k=1}^3 (\sigma'_{ki} - \sigma_{ki}) d\Omega_k = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ki}}{\partial x_k} dx_k d\Omega_k$$

objemová hustota síly

$$f_{P,i} = \frac{dF_{P,i}}{dV} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ki}}{\partial x_k}$$

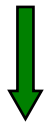
Povrchové síly, napětí

směry a velikost hlavních napětí σ

$$\sigma_{ij} = 0 \quad i \neq j$$

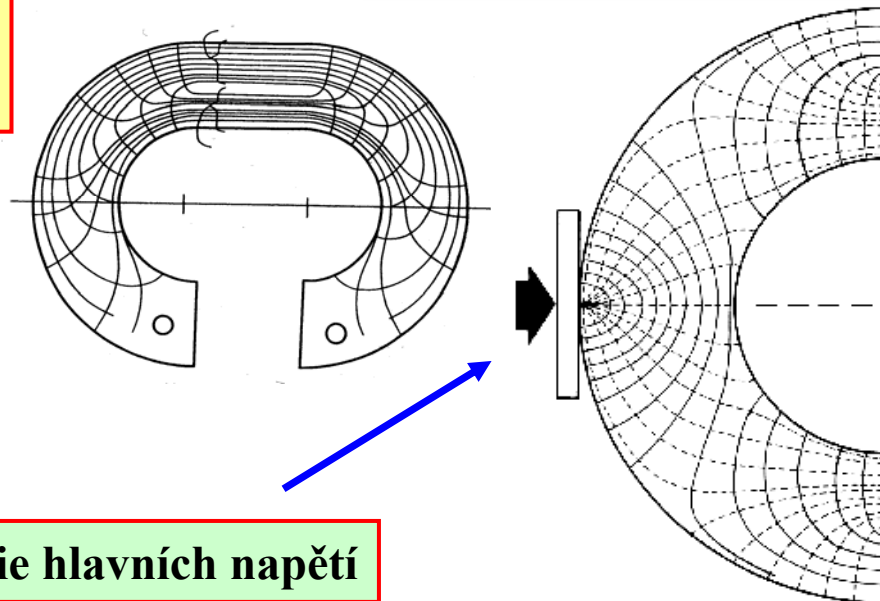
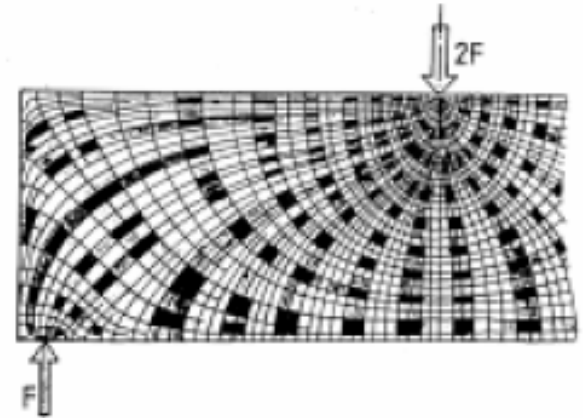
$$\begin{vmatrix} \sigma_{11} - \sigma & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} - \sigma & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} - \sigma \end{vmatrix} = 0$$

$$\vec{\sigma} \vec{n} = \sigma \vec{n}$$



hlavní normálová napětí

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$$



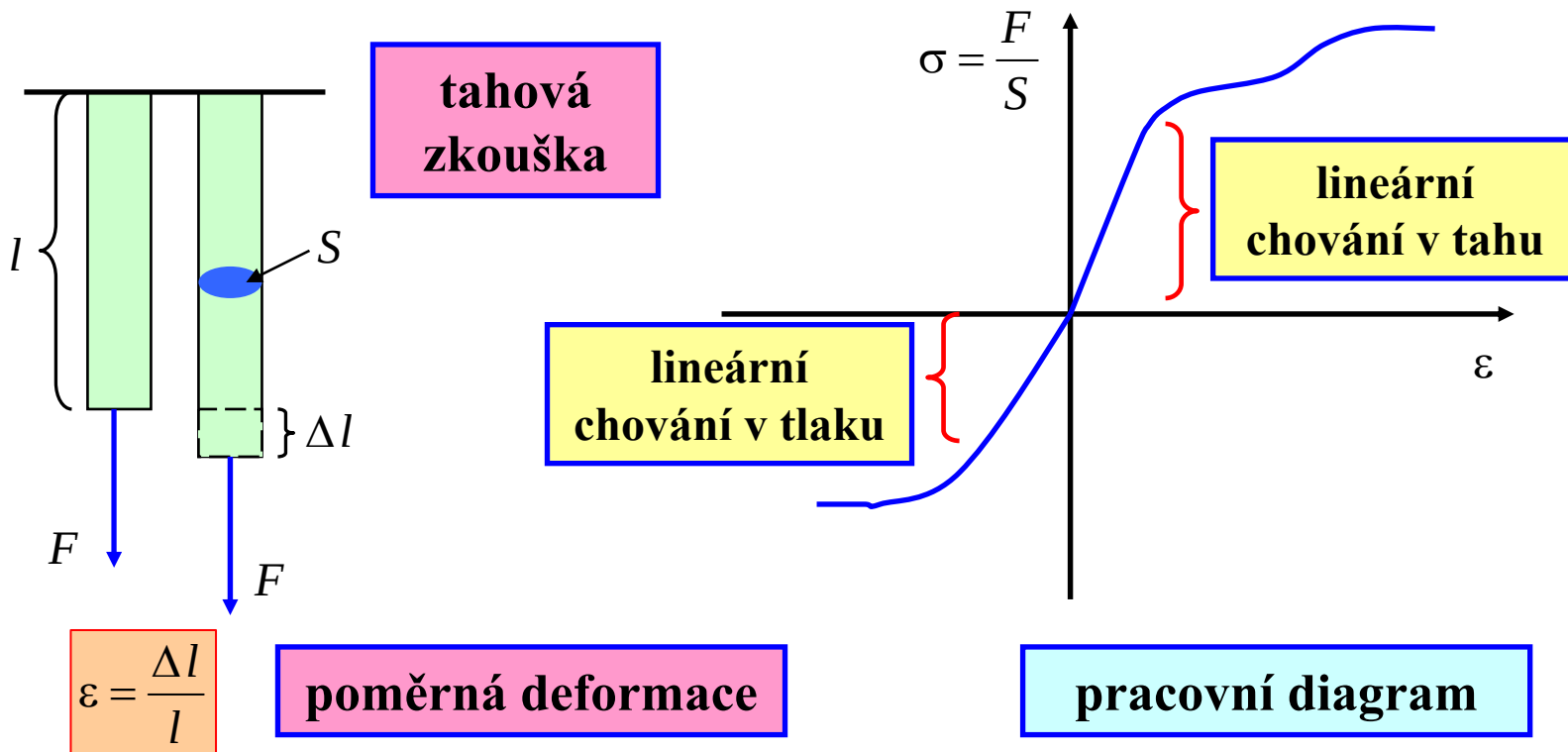
trajektorie hlavních napětí

Vnitřní napětí a deformace

typy vnitřního napětí: elastická napětí, vazká napětí

A) Vnitřní elastická napětí (pnutí)

- odezvy pružného materiálu na deformační procesy



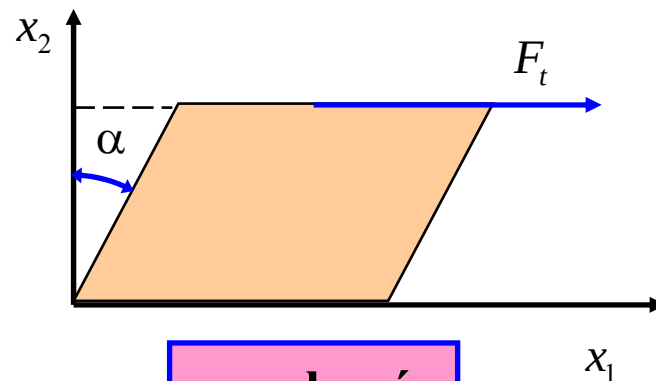
Vnitřní napětí a deformace

- ⊕ lineární vztah v teorii pružnosti mezi deformací a napětím u homogenního izotropního materiálu lze vyjádřit **Hookeovým zákonem**:

$$\sigma_n = E\varepsilon \quad \sigma_t = \tau = G\alpha$$

- ⊕ při obecném jednoosém namáhání platí:

$$\sigma_{ii} = E \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = E\varepsilon_{ii} \quad \sigma_{ik} = G \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \quad (i \neq k)$$



**smyková
zkouška**

- ⊕ v obecném případě **anizotropního materiálu** (např. dřevo, kompozity,...) platí:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}$$

**Deformace jsou různé při
namáhání v různých
směrech**

**C_{ijkl} - tenzor elastických
koeficientů**

**izotropní materiál
2 elastické koeficienty – E, G**

Základní pružná namáhání

⊕ Pružnost v tahu:

$$\sigma > 0$$

$$\sigma = \frac{F}{S} = E\varepsilon = E \frac{\Delta l}{l}$$

poměrné délkové
prodloužení

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}$$

$$l' = l(1 + \varepsilon) = l \left(1 + \frac{\sigma}{E} \right)$$

poměrné příčné
zkrácení

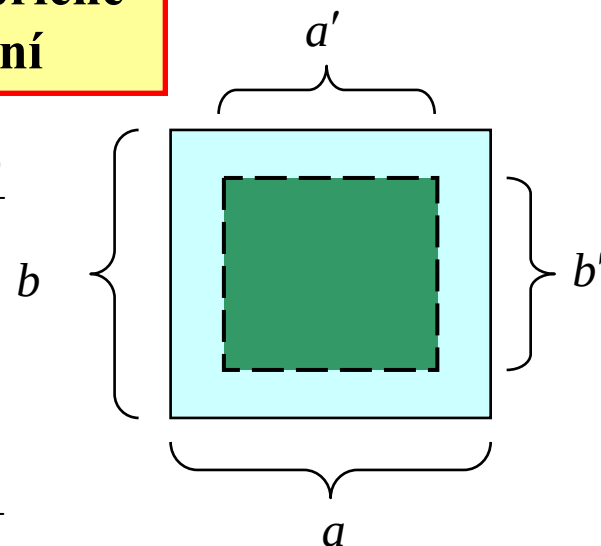
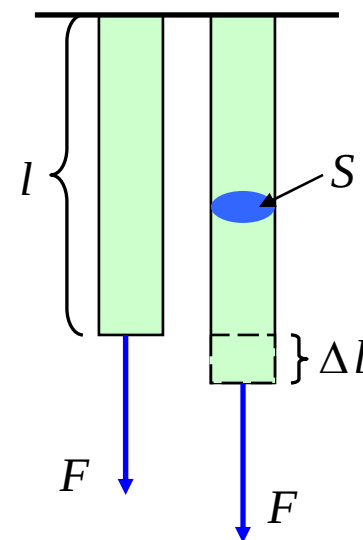
$$a' = a(1 - \eta) = a \left(1 - \nu \frac{\sigma}{E} \right)$$

$$\nu = \frac{\Delta a}{a} = \frac{\Delta b}{b}$$

Poissonovo
číslo

$$\nu = \frac{\eta}{\varepsilon}$$

$$0 < \nu < \frac{1}{2}$$



Základní pružná namáhání



Všestranný kolmý tlak:

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = -p = -\sigma_n < 0$$



v kapalinách v klidu (vzhledem k jejich deformovatelnosti) působí tzv. **statické tlaky**, jež jsou speciálním případem elastických napětí.

- jsou **konstantní** v každém bodě povrchu nějakého objemu, jsou **kolmé na povrch** a jsou orientovány dovnitř objemu

délková změna hrany

$$a' = a(1 - \varepsilon + 2\eta) = a \left(1 - \frac{\sigma_n}{E} + 2\nu \frac{\sigma_n}{E} \right)$$

objemová změna

$$\Delta V = a'b'c' - abc = abc[(1 - \varepsilon + 2\eta)^3 - 1] = -3(\varepsilon - 2\eta)V$$

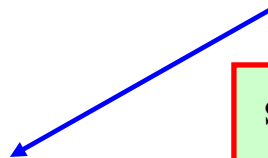
$$\vartheta = \frac{\Delta V}{V} = \frac{-3(1 - 2\nu)}{E} \sigma_n$$



$$K = \frac{1}{\gamma} = \frac{E}{3(1 - 2\nu)}$$

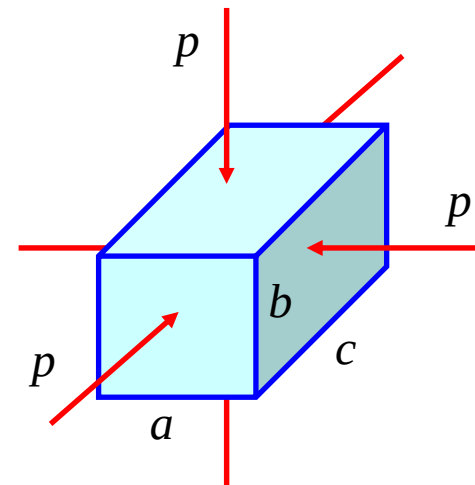
$$\gamma = -\frac{\Delta V}{V} \frac{1}{p}$$

$$0 < \nu < \frac{1}{2}$$



součinitel objemové pružnosti

objemová stlačitelnost



Základní pružná namáhání

$$\nu = \frac{1}{2} \Rightarrow \gamma = 0, \Delta V = 0 \rightarrow \text{nestlačitelný materiál}$$

relativní změna objemu

$$dV' = (dx_1 + du_1)(dx_2 + du_2)(dx_3 + du_3)$$

$$dV = dx_1 dx_2 dx_3$$

$$\vartheta = \frac{dV' - dV}{dV} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}$$



$$p = -K \frac{dV}{V} = -K\vartheta$$

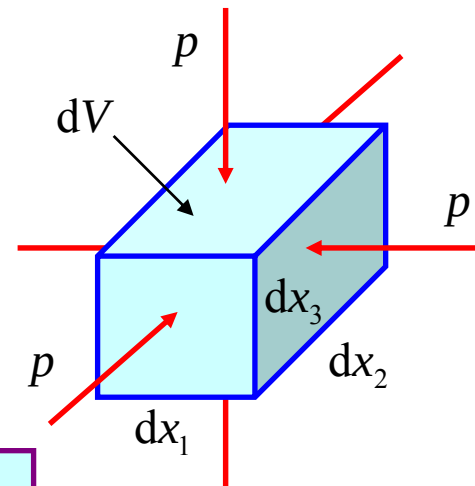
Statický tlak p se
snaží zmenšit objem

K...modul objemové pružnosti

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = -p$$

$$\sigma_{ik} = 0 \quad (i \neq k)$$

$$\vec{f}_p = -\text{grad } p$$

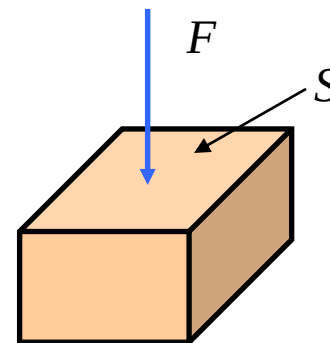


Základní pružná namáhání

⊕ Pružnost v tlaku:

$$\sigma < 0$$

$$\sigma = -F / S$$

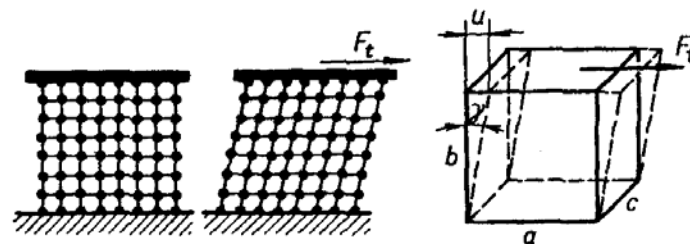


⊕ Pružnost ve smyku:

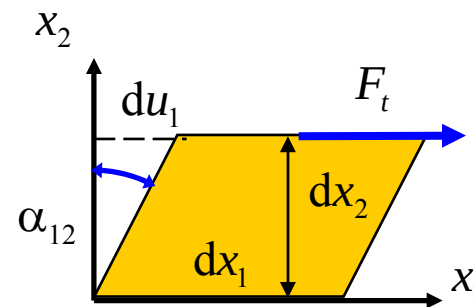
- síla působí v rovině průřezu
- jednotlivé vrstvy materiálu se navzájem posouvají, aniž se mění jejich kolmá vzdálenost

$$\sigma_t = \tau = G\alpha$$

**tečné (smykové)
napětí**



$$\alpha_{12} \approx \operatorname{tg} \alpha_{12} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} = 2\varepsilon_{12}$$



Základní pružná namáhání

Pružnost ve smyku

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\gamma}{2}\right) = \frac{1 - \operatorname{tg}(\gamma/2)}{1 + \operatorname{tg}(\gamma/2)} = \frac{1 - \eta}{1 + \varepsilon}$$

$$\operatorname{tg}(\gamma/2) \approx \gamma/2 \quad \gamma \ll 1 \quad \varepsilon, \eta \ll 1$$

$$\gamma \approx \varepsilon + \eta = \frac{\sigma_n}{E}(1 + \nu)$$

$$F = \sigma_n S \quad F_t = F \cos \frac{\pi}{4} = \frac{F}{\sqrt{2}}$$

$$\tau = \frac{F_t}{S'} = \frac{F_t}{\sqrt{2}S} = \frac{F}{2S} = \frac{\sigma_n}{2} = \frac{E}{2(1 + \nu)} \gamma$$

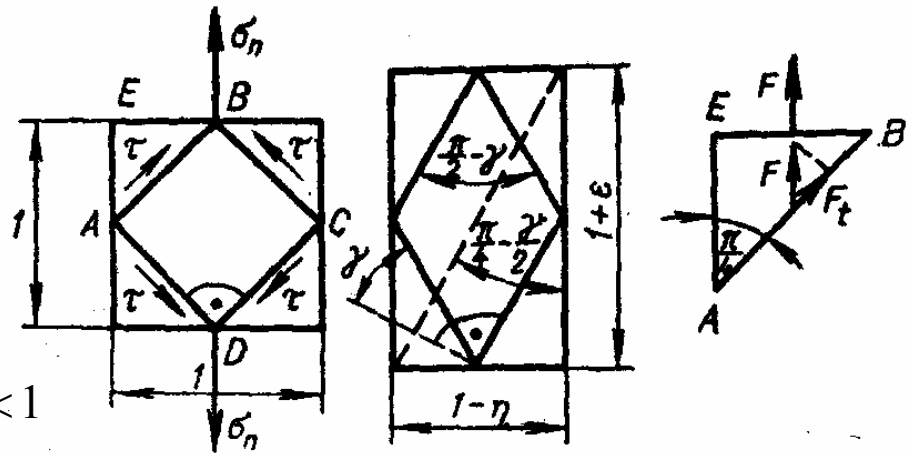
modul pružnosti
ve smyku

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)}$$

$$\frac{E}{3} < G < \frac{E}{2}$$

Hookeův zákon

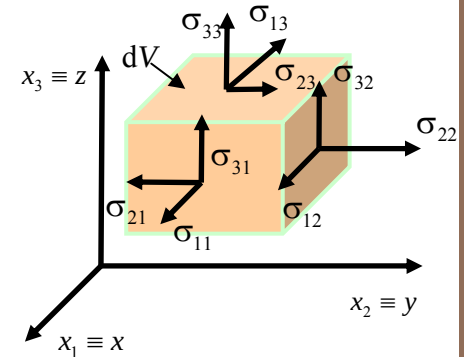
$$\tau = G\gamma$$



Základní pružná namáhání

Hookeův zákon – homogenní izotropní elastický materiál ($E, G = \text{konst.}$)

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{11} \neq 0, \quad \sigma_{22} = \sigma_{33} = 0 \\ \sigma_{22} \neq 0, \quad \sigma_{11} = \sigma_{33} = 0 \\ \sigma_{33} \neq 0, \quad \sigma_{11} = \sigma_{22} = 0 \end{aligned} \right\} \longrightarrow \begin{aligned} \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = -\nu \varepsilon_{11} &= -\nu \frac{\sigma_{11}}{E} \\ \varepsilon_{11} = \varepsilon_{33} = -\nu \varepsilon_{22} &= -\nu \frac{\sigma_{22}}{E} \\ \varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = -\nu \varepsilon_{33} &= -\nu \frac{\sigma_{33}}{E} \end{aligned}$$



$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1}{E} [\sigma_{11} - \nu(\sigma_{22} + \sigma_{33})] \\ \varepsilon_{22} &= \frac{1}{E} [\sigma_{22} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{33})] \\ \varepsilon_{33} &= \frac{1}{E} [\sigma_{33} - \nu(\sigma_{11} + \sigma_{22})] \end{aligned} \right\}$$

$$\vartheta = \sum_k^3 \varepsilon_{kk} = \frac{1-2\nu}{E} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})$$

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)$$

$$\sigma_{ii} = \frac{E}{1+\nu} \left[\varepsilon_{ii} + \frac{\nu}{1-2\nu} \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{kk} \right]$$

$$\sigma_{ik} = G \alpha_{ik} = 2G \varepsilon_{ik}$$

Základní pružná namáhání

Elastické charakteristiky materiálů:

Materiál	E [GPa]	G [GPa]	μ
ocel	190-220	70-90	0,25-0,35
hliník	65-68	25-27	0,33
dřevo	10-15	0,3-1,0	0,2
beton	40-80	16-33	0,1-0,15
sklo	50-80	20-30	0,25

Materiál	K [GPa]
voda	2
láh	0,9
rtuť	26



C012+C119



C086-02+C086-10

Základní pružná namáhání

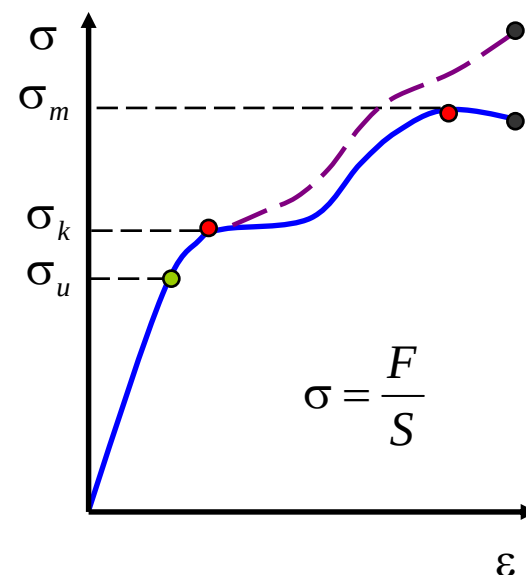
Pevnost materiálů:

- ✦ Při navrhování konstrukcí je nutné zajistit, aby napětí nepřekročilo hodnotu, která by se vyznačovala velkými deformacemi resp. porušením konstrukce

výpočtová pevnost

$$\sigma_{\text{výp}} \leq \frac{\sigma_m}{C_1} \quad \text{resp.} \quad \sigma_{\text{výp}} \leq \frac{\sigma_k}{C_2}$$

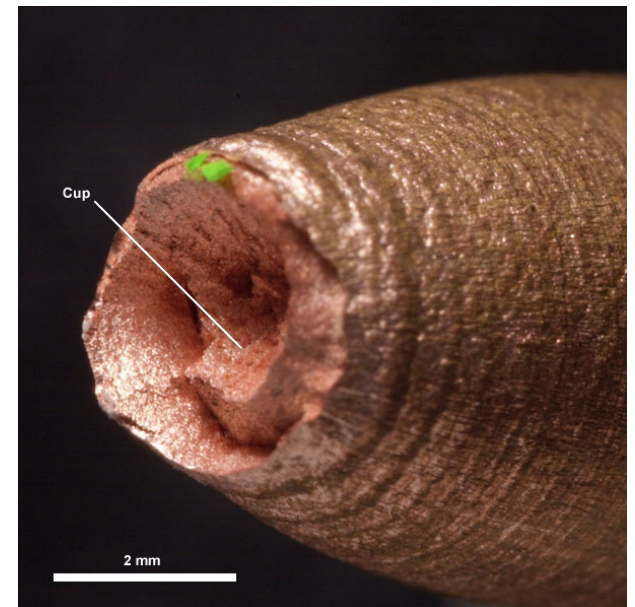
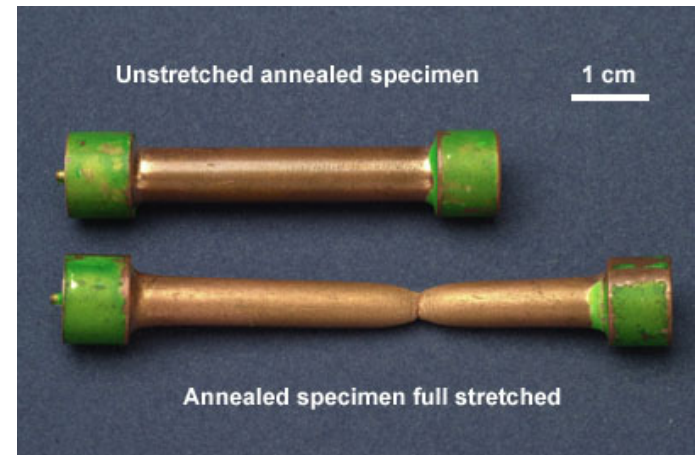
Materiál	σ_u [MPa]	σ_m [MPa]
ocel	190-220	380-450
dural	180-200	370
dřevo	25	40
sklo	40-100	80-200
beton	3-25	5-50
zdivo	2-6	3,5-20



pevnostní
charakteristiky
materiálů (tlak)

Základní pružná namáhání

Video – pevnost v tahu:



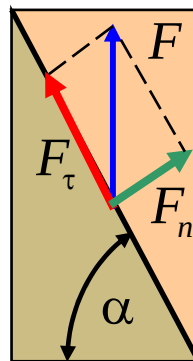
Základní pružná namáhání

Příklad: (tahové a smykové namáhání)

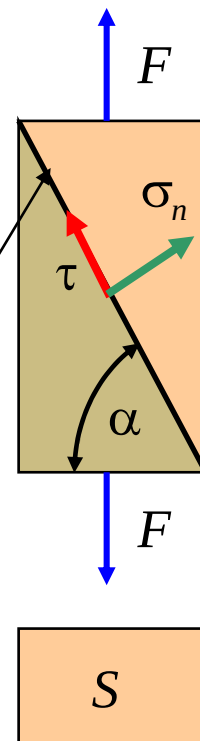
- určete smykové a normálové napětí v ploše lepeného spoje

$$F_{\tau} = F \sin \alpha$$

$$F_n = F \cos \alpha$$



$$S' = S / \cos \alpha$$



smykové napětí

$$\tau = \frac{F_{\tau}}{S'} = \frac{F}{S} \sin \alpha \cos \alpha$$

normálové napětí

$$\sigma_n = \frac{F_n}{S'} = \frac{F}{S} \cos^2 \alpha$$

Základní pružná namáhání

Příklad: (statické a dynamické protažení pružného lana)

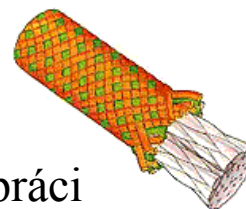
a) Statické protažení

$$F_E = G \quad \longrightarrow$$

$$x_s = \frac{mg}{ES} L$$

$$\frac{F_E}{S} = E\varepsilon = E \frac{x}{L}$$

předpoklad lineárního chování lana



b) Dynamické protažení

- změna polohové energie se spotřebuje na práci nutnou k protažení lana

$$\Delta W_p = A$$

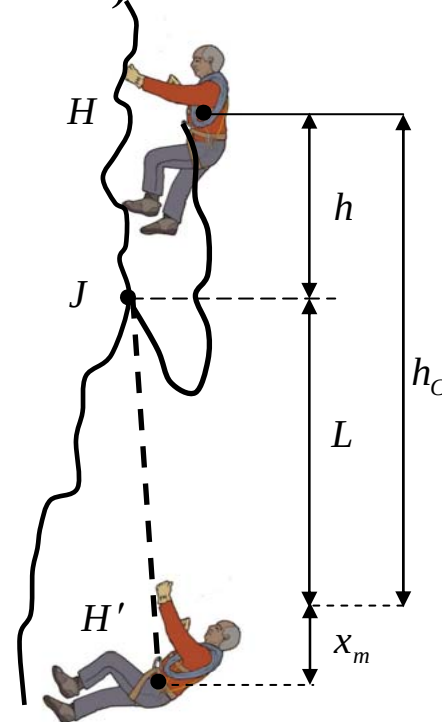
$$A = \int_0^{x_m} F dx = \frac{ES}{L} \int_0^{x_m} x dx = \frac{ES}{2L} x_m^2$$

$$\Delta W_p = mg(h_c + x_m)$$

$$x_m^2 - \frac{2mgL}{ES} x_m - \frac{2mgL}{ES} h_c = 0$$

$$x_m = \frac{mgL}{ES} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{2ES}{mgL} h_c} \right]$$

$$F_{\max} = ES \frac{x_m}{L}$$



$$E = 500 \text{ MPa}$$

$$L = 30 \text{ m}$$

$$S = 0,8 \text{ cm}^2$$

$$m = 80 \text{ kg}$$

$$h_c = 60 \text{ m}$$

$$F_{\max} = 12,1 \text{ kN}$$

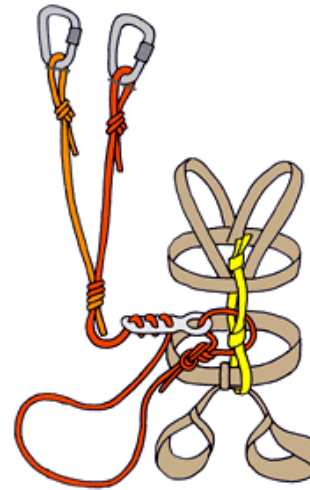
$$x_s \doteq 2 \text{ m}$$

$$x_m \doteq 9,1 \text{ m}$$

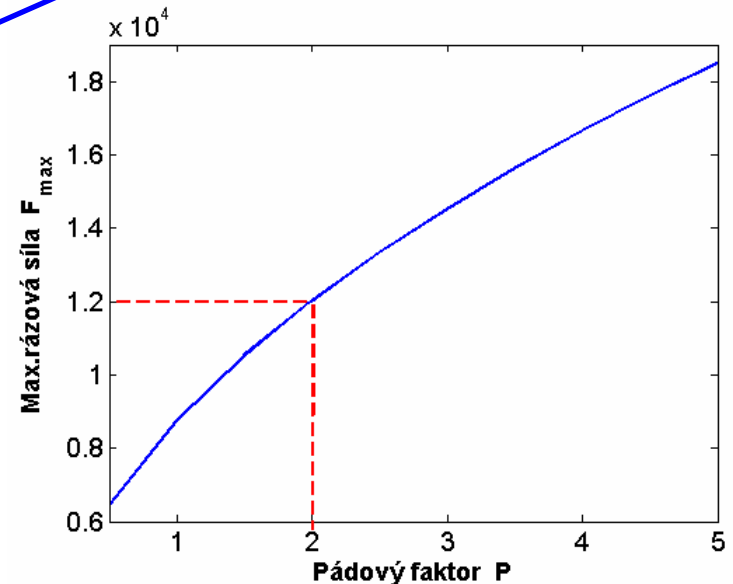
Základní pružná namáhání

Rázová síla – lano bez prokluzu

Pádový faktor $P=h_c/L$	Rázová síla $F_{\max}$ [kN]
0,5	6,4
1	8,7
1,5	10,5
2	12,1
3	14,5
4	16,7
5	18,5



via ferrata – $P = 0.5-5$



Základní pružná namáhání

Příklad: (čistý ohyb nosníku)

- předpoklad zachování rovinnosti průřezů i po deformaci (D.Bernoulli)

Relativní prodloužení:

$$\varepsilon = \frac{ds' - ds}{ds} = \frac{z}{r}$$

napětí v průřezu:

$$\sigma = E\varepsilon = \frac{E}{r} z$$

Výslednice sil v průřezu:

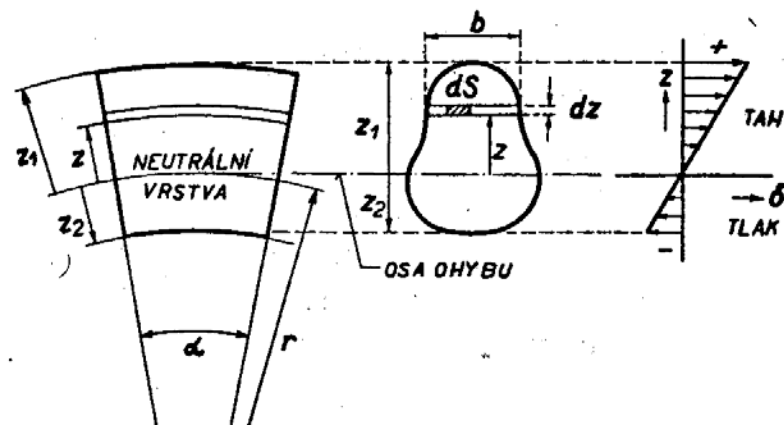
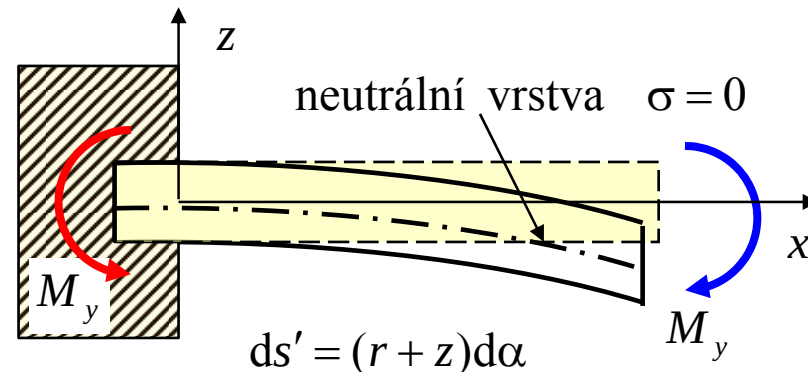
$$F = 0$$

$$F = \iint_S \sigma dS = \frac{E}{r} \iint_S z dS = \frac{E}{r} z_T S = 0$$

Moment síly v průřezu:

$$M_y \neq 0$$

$$M_y = \int z dF = \frac{E}{r} \iint_S z^2 dS = \frac{E}{r} I_y$$



neutrální vrstva prochází
těžištěm průřezu

I_y [m⁴] ...moment
setrvačnosti průřezu

Základní pružná namáhání

Příklad: (čistý ohyb nosníku)

$$ds = r d\alpha$$

$$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dz)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} dx$$

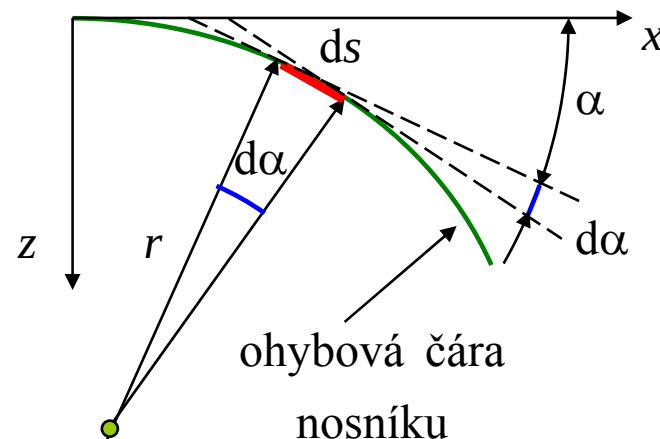
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dz}{dx} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \operatorname{arctg} \frac{dz}{dx}$$

$$d\alpha = \frac{d^2 z}{dx^2} \cdot \frac{1}{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} dx$$

**Průhybová čára nosníku
(malé deformace)**

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dw}{dx} \ll 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{r} \approx \frac{d^2 z}{dx^2}$$

$$M_y = \frac{E}{r} I_y = EI_y \frac{d^2 z}{dx^2} = EI_y \frac{d^2 w}{dx^2}$$

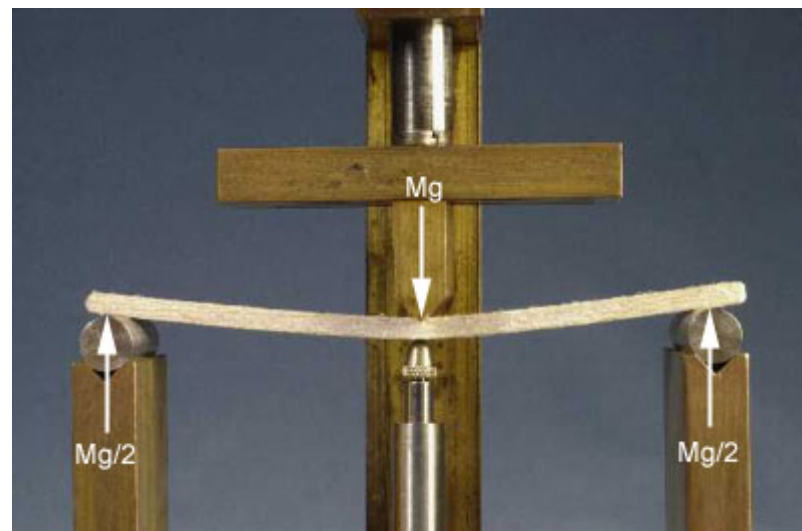


Křivost křivky:

$$\frac{1}{r} = \frac{d\alpha}{ds} = \frac{d^2 z}{dx^2} \cdot \frac{1}{\left[1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}$$

Základní pružná namáhání

Video – ohyb nosníku (měření modulu pružnosti):



$$EI \frac{dw}{dx} = -\frac{Fx^2}{4} + C_1$$

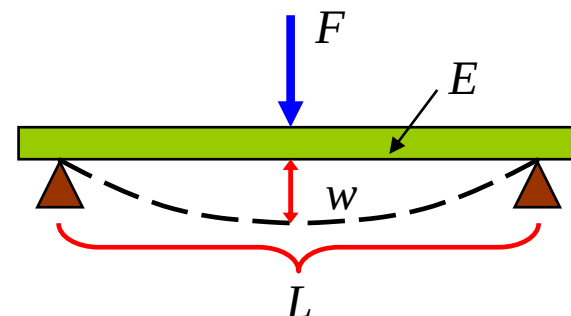
$$EIw = -\frac{Fx^3}{12} + C_1x + C_2$$

$$EI \frac{d^2w}{dx^2} = M_y = -\frac{Fx}{2}$$

$$x = L/2 \Rightarrow dw/dx = 0$$

$$x = 0 \Rightarrow w = 0$$

$$C_1 = FL^2/16 \quad C_2 = 0$$



$$w = \frac{FL^3}{48EI}$$

Vnitřní napětí a deformace

B) Vazká napětí

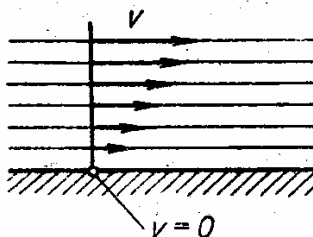
- napětí sil vnitřního tření
- jsou odezvou materiálu na posouvání jeho jednotlivých částí vůči sobě

důležité u tekutin

• Newtonův zákon viskozity:

- vyjadřuje přímou úměru mezi rychlostí deformace a smykovým napětím

Vazká napětí



$$\sigma_{ik} = \eta \frac{\partial v_k}{\partial x_i} = 2\eta D_{ki}$$

dynamická viskozita
látky [Pa·s]

$$D_{ki} = \frac{\partial \varepsilon_{ki}}{\partial t} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_k}{\partial x_i} + \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right)$$

tenzor rychlosti
deformace

- v praxi existují i tzv. nenewtonovské materiály
(např. asfalt, krev, bahno,...)

$$D_{ki} = f(\sigma_{ik})$$

Rovnice mechaniky kontinua

⊕ Rovnice kontinuity:

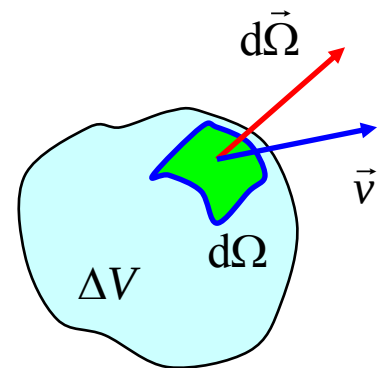
$$\frac{dm}{dt} = 0$$

- vyjadřuje zákon zachování hmoty
- úbytek hmotnosti, ke kterému v objemu ΔV dojde za časovou jednotku, je roven toku hmotnosti přes povrch $\Delta\Omega$ objemu ΔV

$$dm = \rho dV = \rho d\vec{\Omega} \cdot \vec{v}$$

$$d\vec{\Omega} = \vec{n} \cdot d\Omega$$

$$m = \oiint_{\Delta\Omega} \rho \vec{v} d\vec{\Omega} \quad \longleftrightarrow \quad m = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Delta V} \rho dV = -\int_{\Delta V} \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$



Hmotnostní tok kapaliny za jednotku času v objemu ΔV

- použitím Gaussovy věty získáme
$$\oiint_{\Delta\Omega} \rho \vec{v} d\vec{\Omega} = \int_V \text{div } \rho \vec{v} dV = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV$$

Rovnice kontinuity

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \rho \vec{v} = 0$$

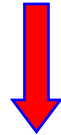
Rovnice mechaniky kontinua

⊕ Rovnice kontinuity pro **stacionární proudění nestlačitelné** tekutiny:

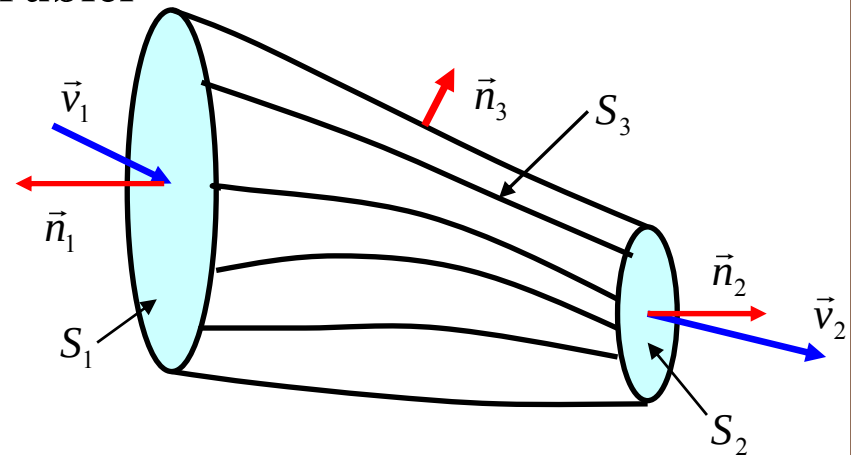
$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 \quad \longrightarrow \quad \operatorname{div} \rho \vec{v} = 0 \quad \longrightarrow \quad \oint_{\Delta\Omega} (\rho \vec{v} \cdot d\vec{\Omega}) = 0$$

- **ustálené proudění proudovou trubicí**

$$\int_{S_1} (\rho \vec{v} \cdot d\vec{\Omega}) + \int_{S_2} (\rho \vec{v} \cdot d\vec{\Omega}) + \int_{S_3} (\rho \vec{v} \cdot d\vec{\Omega}) = 0$$



$$\rho_1 v_1 S_1 = \rho_2 v_2 S_2$$



- u **nestlačitelné kapaliny**: $\rho(\vec{r}, t) = \text{konst.}$



$$v_1 S_1 = v_2 S_2$$

Pohybová rovnice kontinua

⊕ Pohybová rovnice kontinua:

$$\vec{v} = \vec{v}(x_1(t), x_2(t), x_3(t), t)$$

$$dM\vec{a} = dM \frac{d\vec{v}}{dt} = dM \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} \right] = d\vec{F}_O + d\vec{F}_P$$



$$\rho \vec{a} = \vec{f}_O + \vec{f}_P$$

Pohybová rovnice kontinua

$$\vec{f}_O = \rho \vec{E}$$

$$f_{P,i} = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ki}}{\partial x_k}$$

- v případě vazké kapaliny v tíhovém poli:

$$\rho \vec{a} = \rho \vec{g} - \text{grad} p + \eta \Delta \vec{v}$$

Navier-Stokesova rovnice

$$f_{vi} = \eta \sum_{k=1}^3 \frac{\partial^2 v_i}{\partial x_k^2} = \eta \Delta v_i$$

$$\vec{f}_T = -\text{grad} p$$

$$\vec{f}_O = \rho \vec{g} = -\rho \text{grad} \varphi$$